ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο Κεφ. 2, όπως και σε όλο το βιβλίο άλλωστε, αναπτύσσουμε τον μετ/σμό **Laplace**, τον μετ/σμό **Fourie**r και και τον μετ/σμό **z**. Αυτό δεν σημαίνει βέβαια πως για την ανάλυση ενός σήματος διαθέτουμε μόνο τρία είδη μετασχηματισμών. Μέσω όμως των 3 αυτών μετ/σμών πετυχαίνουμε, σε μεγάλο βαθμό, μία σε βάθος κατανόηση του πώς οι μαθηματικές τους ιδιότητες συμβάλλουν στην επεξεργασία ενός σήματος, πάντα βέβαια σε αναλογία με τα χρησιμοποιούμενο τεχνικά μέσα. Επίσης, επειδή συχνά -περισσότερο για εμπορικούς παρά επιστημονικούς λόγους- επανέρχεται το ερώτημα αν «**πρέπει τελικά να προτιμάμε το αναλογικό ή το ψηφιακό σήμα;**», στο εγχειρίδιό μας «**Ανάλυση Σήματος**» (σ.203) υποστηρίξαμε ότι από επιστημονική άποψη (ή αν θέλετε από μεριάς **software**) πρόκειται μάλλον για ένα **ψευτοδίλημμα**!

Σπεύδουμε εξ αρχής να διευκρινίσουμε ότι **δεν** θα δοθεί από τώρα η **ακριβής** περιγραφή του κάθε **Π.Ο** (δηλαδή του κάθε δ.χ. V) επί του οποίου θα ορίσουμε αυτό που αμέσως μετά θα ονομάσουμε **τελεστή** (**operator**) ή **μετασχηματισμό** (**transformation**). Θα ορισθεί μεν αυστηρά αυτός, αλλά, ούτως ή άλλως, η συνήθης χρήση του όρου αποδίδει σε κάποιον βαθμό και το μαθηματικό του περιεχόμενο!. Θα έχουμε λοιπόν ένα **σύνολο συναρτήσεων** V της μορφής f(x) ή f(z) που, ανάλογα με τις ανάγκες μας, θα είναι αντίστοιχα συναρτήσεις πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής με τιμές είτε γνήσια πραγματικές είτε εν γένει μιγαδικές. Επί του V ορίζουμε τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης συναρτήσεων και πολλαπλασιασμού σταθεράς επί συνάρτηση μαζί με όλα τα στοιχεία και τις ιδιότητες που περιγράφονται στο **Κεφ. 0** και καθιστούν τον V **διανυσματικό χώρο** (δ.χ.).

Αν V_1,V_2 δύο δ.χ., με τα στοιχεία τους συναρτήσεις όπως περιγράφονται πιο πάνω (θα τους λέμε στο εξής απλά χώρους συναρτήσεων), ορίζουμε ως μετασχηματισμό ή τελεστή μεταξύ των δύο αυτών χώρων **κάθε απεικόνιση** T: $V_1 \rightarrow V_2$. Επισημαίνουμε ότι το σύνολο τιμών του T απλά περιέχεται εντός του .V_2 και ότι ακόμα και να ξέρουμε επακριβώς το Π.Ο και να ήταν απλός ο μηχανισμό λειτουργίας του T, είναι εν γένει ένα δύσκολο πρόβλημα ο ακριβής προσδιορισμός του **συνόλου τιμών** του. Για **παράδειγμα** ,αν πάρουμε για V_1 το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων στο [0,1] και για T την πράξη της παραγώγισης (συνήθως τότε λέμε ότι έχουμε ένα **διαφορικό τελεστή**-differential operator- D) είναι δύσκολο να περιγράψετε ποιες ακριβώς συναρτήσεις βρίσκονται στο σύνολο τιμών του D.

Βέβαια η περιγραφή αυτή του T, που δώσαμε μέχρι τώρα, είναι τόσο ευρεία που πρέπει να ζητήσουμε και άλλα πράγματα από έναν μετ/σμό. Πράγματι, θα απαιτήσουμε από τον T να είναι **γραμμικός** (θα ορισθεί αμέσως μετά) αλλά και κάτι μάλλον αναμενόμενο: ο T θέλουμε να είναι και **αντιστρέψιμος** (**invertible**). Δηλαδή θέλουμε να υπάρχει ένας μετ/σμός –που συνήθως– θα συμβολίζεται με T^{-1}, έτσι ώστε αν Tf=g τότε T^{-1}g=f **για κάθε** $f \in V_1$.

ΣΧΟΛΙΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ: δεν πρόκειται για μία εντελώς αυστηρή περιγραφή, αλλά δεν χρειάζεται να δοθεί κάποια αυστηρότερη τουλάχιστον για τις ανάγκες μας. Επίσης δεν πρέπει να παρασυρθείτε και να θεωρήσετε αβασάνιστα την αόριστη ολοκλήρωση ως τον D^{-1}, λόγω της παρουσίας της γνωστής σταθεράς c που προσθέτουμε στο αποτέλεσμα.!

Ορισμός Γραμμικού Μετ/σμού

Αν V το Π.Ο του T, f,g δύο οποιαδήποτε στοιχεία του Ω και κ οποιαδήποτε σταθερά (πραγματική όχι ανάλογα με τον ορισμό του V πρέπει να συναληθεύουν οι σχέσεις

(**α**) T(f+g)=(Tf)+(Tg) και (β)T(κf)=κ(Tf)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Στη κατηγορία των **απλών ασκήσεων** (χωρίς υπόδειξη) του Κεφ. 1 σας ζητάμε να δείξετε ότι αν T γραμμικός με πεδίο τιμών τον δ.χ. W τότε επίσης θα ισχύουν και οι σχέσεις T(f-g)=(Tf)-(Tg) και $T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$, (όπου για να διαχωρίσουμε τον αριθμό 0 από την μηδενική συνάρτηση γράφουμε αυτήν ως **0**). Προφανώς ένα πασίγνωστο παράδειγμα **γραμμικού τελεστή** είναι ο D και, τέλος, μία απλή και αυτονόητη παρατήρηση που όμως θα αποδειχθεί πολύ χρήσιμη, είναι ότι αν $T(\mathbf{0}_V)\neq\mathbf{0}_W$ τότε ο Tα **δεν** είναι γραμμικός!

2.1 Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ & Ο ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤ/ΣΜΟΣ LAPLACE

Ο δ.χ.V των συναρτήσεων f(x) επί του οποίου θα ορίσουμε τον (μονόπλευρο) μετ/σμό Laplace περιλαμβάνει **κατά τμήματα συνεχείς** συναρτήσεις (κ.τ.σ.) ορισμένες είτε επί του [0, +∞) είτε και επί του (0, + ∞). Οι τιμές της f(x) είναι στο $\mathbb{R}$ αλλά –πράγμα σπανιότερο– μπορεί να είναι και στο $\mathbb{C}$. Τις κ.τ.σ. συναρτήσεις τις ορίσαμε στο Κεφ.0, αλλά δεν θα προχωρήσουμε από τώρα σε μία ακριβή περιγραφή της κλάσης στον V (στο πνεύμα των εισαγωγικών επεξηγήσεων που δώσαμε στην αρχή του Κεφ. 2). Περιοριζόμαστε να πούμε ότι τα πολυώνυμα, η εκθετική οι συναρτήσεις sinx και cosx είναι στον V καθώς και πολλές άλλες από τις λεγόμενες «**το πολύ με εκθετική ανάπτυξη**» (“**with exponential growth order**”) μία κατηγορία της οποίας θα δώσουμε αυστηρό ορισμό αργότερα.

(Ι)Α Ο (μονόπλευρος) μετ/σμός Laplace: Ορισμός και Παραδείγματα

Αν $f(x)\in V$, ορίζουμε επί του V τον μετ/σμό $\mathcal{L}$ μέσω της σχέσης $(\mathcal{L}f)(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx$, εφόσον βέβαια το καταχρηστικό αυτό ολοκλήρωμα συγκλίνει. Την **νέα** συνάρτηση $\mathcal{L}f = g$ της **νέας** μεταβλητής s την ονομάζουμε **μετ/σμό** Laplace της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Εν γένει, η g(s) έχει Π.Ο. της μορφής (α, +∞).

2. Υπενθυμίζουμε ότι το $\int_0^{+\infty}$ ορίζεται ως το όριο $\lim_{M\to\infty}\int_0^{M}$

3. Αν και φαντάζει μικρή λεπτομέρεια,(δείτε όμως και την ιδιότητα (α) του μέρους (Ι)Β) σε περίπτωση που η f(x) ορίζεται στο $(0,+\infty)$, αλλά όχι στο x=0 στον ορισμό της $(\mathcal{L}f)$ (s) παίρνουμε το $\int_{0^+}^{+\infty}$, εφόσον βέβαια συγκλίνει υπό την έννοια $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}$.

4. Για λόγους που θα φανούν στην πορεία (και έμμεσα άπτονται της συνήθους περιγραφής ενός **αναλογικού** σήματος) παίρνουμε $f(x) = 0$ στο $(-\infty,0)$ ή $(-\infty,0]$, αντίστοιχα.

5. Είναι προφανές ότι ο $\mathcal{L}$ είναι ένας **γραμμικός** μετ/σμός (γιατί;) ενώ –αν και ισχύει!– θα παραμείνει μάλλον θολό μιας και απαιτεί μιγαδική ολοκλήρωση(ή **ολοκλήρωμα βρόχου**) ο $\mathcal{L}$ είναι **αντιστρέψιμος**. Δηλαδή μπορεί να ορίσουμε έναν $\mathcal{L}^{-1}$ έτσι ώστε $\mathcal{L}^{-1}g=f$.

6. Την συνάρτηση $K(x,s)=e^{-sx}$ την ονομάζουμε **πυρήνα** (**kernel**) του $\mathcal{L}$. Η ορολογία αυτή έχει καθιερωθεί για **κάθε** μετ/σμό T που δίνεται μέσω **ολοκληρώματος** και εκφράζει την συνάρτηση των μεταβλητών x και s (ή t, ω, κ.λ.π.) της f και της g=Tf αντίστοιχα και που ολοκληρώνεται μαζί με την f. Η «έξυπνη» επιλογή του πυρήνα ενός ολοκληρωματικού μετασχηματισμού καθορίζει και τον βαθμό της αποτελεσματικότητάς του!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Αν $f(x)=1$ σε όλο το $I=[0,+\infty)$ ή $= (0,+\infty)$, θα υπολογίσουμε την $g=\mathcal{L}f$ μαζί με το Π.Ο της (δηλαδή το διάστημα στο οποίο βρίσκεται το s). Είναι απλή άσκηση του Απειροστικού Λογισμού ότι αν $s\leq 0$ το ολοκλήρωμα απειρίζεται.

$$(\mathcal{L}f)(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx}xdx = -$$

Αντιθέτως αν $s>0$ τότε $\lim_{M\to\infty}\int_0^{M} e^{-sx}dx = 1/s$ (γιατί;). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $(\mathcal{L}1)(s)=1/s$, με s στο $(0, +\infty)$.

Επειδή έχουμε γραμμικό μετ/σμό μπορούμε τώρα να κάνουμε το πρώτο μικρό αλλά σημαντικό βήμα προετοιμασίας για να βρούμε τον μετ/σμό Laplace **τυχαίου πολυωνύμου**: αν c τυχαία σταθερά συνάρτηση του x τότε $(\mathcal{L}c)(s) =c/s$, με s στο $(0, +\infty)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Το επόμενο βήμα φυσικά είναι να βρούμε την $\mathcal{L}$f για την f(x)=x πάλι στο I. Αυτή την φορά θα χρειαστεί ης ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και τις λεπτομέρειες τις αφήνουμε, ως απλή άσκηση, στον επιμελή αναγνώστη. Πάλι για s≤0 το ολοκλήρωμα απειρίζεται. ενώ, αν s>0, τότε $(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}x\,dx = -(e^{-sx}x/s)\Big]_0^{\infty} + (\int_0^{+\infty} e^{-sx}x\,dx)/s = 0+1/s^2 = 1/s^2$, που προκύπτει από τον συνδυασμό του $\lim_{M\to\infty}(e^{-sx}x)\Big]_0^{M} = 0$ με το αποτέλεσμα του Παραδ.1

Πάλι από την γραμμικότητα συμπεραίνουμε ότι για **κάθε** πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $p(x)=\alpha_0x+\alpha_1$ έχουμε $(\mathcal{L}p)(s)= (\alpha_0/s^2)+(\alpha_1/s)$, με s στο $(0, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο ότι $\mathcal{L}x^2= 2/s^3$ (με ελαφρά **κατάχρηση του συμβολισμού** που θα την κάνουμε στο εξής χάριν απλούστευσης) αλλά να μην παρασυρόμαστε από τις αρχικές αυτές μορφές διότι μετά $\mathcal{L}x^3= 6/s^4$ και με λίγη προσοχή καταλήγουμε στον γενικό τύπο $\mathcal{L}x^n =(n+1)!/s^{n+1}$για κάθε n=0,1,2,…πάντα ορισμένη στο $(0, +\infty)$.

Είναι προφανές τώρα ότι μπορούμε, πάλι λόγω της γραμμικότητας, να υπολογίσουμε τώρα την συνάρτηση $(\mathcal{L}p)(s)$ για **οποιοδήποτε πολυώνυμο** p(x), x≥0.

ΣΧΟΛΙΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ: Η πρώτη μέχρι τώρα επαφή με τον μετ/σμό Laplace προκαλεί μια κάποια αμηχανία, αν όχι την απορία του που χρησιμεύει: από μία σημαντική και κομψή κλάση συναρτήσεων όπως είναι τα πολυώνυμα μέσω του $\mathcal{L}$ πήραμε μία ρητή μη πολυωνυμική συνάρτηση και μάλιστα ορισμένη σε ελαφρά στενότερο διάστημα, αφού από το $[0, +\infty)$ για το x τώρα βρεθήκαμε στο $(0, +\infty)$. Η «δικαίωση» για τον $\mathcal{L}$ θα έρθει μόλις παρουσιασθεί η «χρυσή» του ιδιότητα 1 στον μικρό πίνακα ιδιοτήτων του $\mathcal{L}$ που θα παραθέσουμε αργότερα και κυρίως στην Ενότητα **4.1** όπου γίνεται άμεση εφαρμογή σχεδόν όλων των σημαντικότερων ιδιοτήτων του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του μετ/σμού Laplace της εκθετικής συνάρτησης f(x) = e^x περιορισμένης στο [0, +∞). Προφανώς έχουμε ($\mathcal{L}$f)(s) = $\int_0^{+\infty} e^{(1-s)x}dx$. Αν s≤1 το ολοκλήρωμα απειρίζεται (γιατί;), ενώ για s >1 ($\mathcal{L}$f)(s) = $\lim_{M\to\infty} e^{(1-s)x}/(1-s)\,]_0^M = 0-1/(1-s) = 1/(s-1)$.

Να λοιπόν η πρώτη ένδειξη ότι ο μετ/σμός Laplace μπορεί και να απλοποιεί συναρτήσεις και επειδή φαίνεται –χωρίς εν γένει να ισχύει!– ότι «στενεύει» το Π.Ο της f πάρτε την f(x)= $e^{\kappa x}$ όπου κ **τυχαία** σταθερά και πάλι όπως πάντα x>0. Στις Ασκήσεις του Κεφ. 2 σας ζητάμε μιμούμενοι το Παράδ.4 να δείξετε ότι ($\mathcal{L}$f)(s)= $1/e^{\kappa x}$ με s στο (κ, +∞). Προφανώς αφού κ μπορεί να εκληφθεί όσο αρνητικό θέλει έχουμε και «τεράστια» διεύρυνση του Π.Ο της f.

Σημειώστε ότι με κ=0 έχουμε ακριβώς το αποτέλεσμα του Παραδ.1 τόσο στη μορφή όσο και στο Π.Ο της ($\mathcal{L}$f)(s).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Στις συναρτήσεις του δ.χ. V που επιδέχονται μετ/σμό Laplce είχαμε αναφέρει τις f_1(x)= sinx και f_2(x)= cosx. Για να το δούμε αυτό θα με τον τύπο $e^{i\theta}$ =csθ+ιsinθ (Θεώρημα Euler-DeMoivre).Με –θ αντί του θ και με προσθαφαίρεση των δύο τύπων έχουμε τους γνωστούς τύπους cosx=($e^{i\theta}+e^{-i\theta}$)/2 και sinθ= ($e^{i\theta}-e^{-i\theta}$)/2ι, οπότε ο υπολογισμός των ($\mathcal{L}f_1$)(s) και ($\mathcal{L}f_2$)(s) ανάγεται στην εύρεση του $\mathcal{L}\,e^{ix}$ που όμως **δεν** το ξέρουμε διότι τον τύπο ($\mathcal{L}\,e^{\kappa x}$)(s) = $1/(s-\kappa)$ για s>κ τον έχουμε προσεγγίσει μόνο για την περίπτωση **πραγματικής** σταθεράς κ. Στις «δύσκολες» (για αυτό και ο αστερίσκος που την συνοδεύει) του Κεφ. 2 ζητάμε με βάση-μεταξύ άλλων-και την υπόδειξη $\left|e^{\kappa+i\lambda}\right| = e^{\kappa}$ για κ και λ πραγματικούς, να δείξετε ότι αν ο α είναι μιγαδική σταθερά τότε ($\mathcal{L}\,e^{\alpha x}$)(s)=1(/s-α), για s>Reα (=πραγματικό μέρος του α).

Αν συνδυάσουμε την γραμμικότητα του $\mathcal{L}$ με τους δύο αρχικούς μας τύπους και το πιο πάνω αποτέλεσμα τότε μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στους σημαντικούς τύπους

($\mathcal{L}$cosx)(s)= s/(s²+1) και ($\mathcal{L}$sinx)(s)= 1/(s²+1) για s>0 (γιατί;).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στις (χωρίς αστερίσκο!) ασκήσεις του Κεφ.2 σας ζητάμε στο πνεύμα της προσέγγισης των Παραδ.4 και 5 να δείξετε τους πι γενικούς τύπους

$$(\mathcal{L}\cos\kappa x)(s)= s/(s^2+\kappa^2) \text{ και } (\mathcal{L}\sin x)(s)= \kappa/(s^2+\kappa^2) \text{ για } s>0.$$

Πριν ολοκληρώσουμε το μέρος (Ι) της Ενότητας 2.1 με την καταγραφή (χωρίς αποδείξεις!) των 4 βασικότερων –πέραν της γραμμικότητας φυσικά- ιδιοτήτων του $\mathcal{L}$, ας δούμε σαν μία, εκ πρώτης όψεως δύσκολη, επαναληπτική άσκηση όσων αναπτύξαμε μέχρι τώρα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Υπολογίστε (μέχρι τέλους) τον μετ/μό Laplace της $f(x)= e^{-2x} +1+\sin^2 x, x\geq 0$. Προσδιορίστε επίσης το διάστημα ορισμού της s.

Απάντηση: Ο $\mathcal{L}$ είναι γραμμικός και **δεν** ισχύει (σχεδόν ποτέ!) ότι $L(fg) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$. Συνεπώς θα πρέπει να απαλλαγούμε-αν γίνεται!- από τον όρο με το υψωμένο. Ευτυχώς η στοιχειώδης τριγωνομετρία μας λέει ότι $2.\sin^2 x=1-\cos 2x$ και έτσι θέλουμε την συνάρτηση

$$((\mathcal{L}\, e^{-2x} - \cos 2x /2 +3/2)(s)= (1/s+2)-(s/2(s^2+4)) +(3/2s).$$

Προσέχουμε επίσης ότι ενώ για την εκθετική έχουμε $s>-2$ για την τριγωνομετρική και την σταθερή συνάρτηση έχουμε $s>0$ οπότε η συναλήθευση δίνει για Π.Ο. της μετασχηματισμένης το $(0, +\infty)$.□

(I)B Οι 4 βασικότερες Ιδιότητες του μετ/μού Laplace

(**α**) Αν η f(x) είναι ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο $(0, +\infty)$ τότε $(\mathcal{L}f')(s)= s(\mathcal{L}f)-f(0)$. Δηλαδή με εξαίρεση το μικρό «πρόστιμο» του f(0), ο $\mathcal{L}$ μετατρέπει την παραγώγιση σε απλό αλγεβρικό πολλαπλασιασμό επί την νέα μεταβλητή. Είχαμε ήδη ονομάσει αυτήν την ιδιότητα «χρυσή» και θα δώσουμε τώρα ένα απλό παράδειγμα χρήσης της. Βέβαια η πιο σημαντική εφαρμογή της θα είναι όταν με την βοήθειά της και με μία ειδική περίπτωση περιγραφής του μηχανισμού του $\mathcal{L}^{-1}$, λύσουμε στην Ενότητα 4.1 ειδικές κατηγορίες Γραμμικών Δ.Ε. 2ας τάξης με σταθερούς συντελεστές. Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι σε περίπτωση που δεν ορίζεται η f0) τότε αφαιρείται το $f(0^+)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $(\mathcal{L}\cos x)(s)=[\mathcal{L}(\sin x)'](s)= s(\mathcal{L}\sin x)(s)-\sin 0=s(1/s^2+1)-0= s/s^2+1$, που όντως ισχύει.□
2. Αν η f(x) είναι ορισμένη και δις-παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=-1$ για να εκφράσουμε την $(\mathcal{L}f'')(s)$ συναρτήσει της $(\mathcal{L}f)(s)$ γράφουμε την $f''=(f')'$ και κάνουμε **διπλή χρήση** της (α): $(\mathcal{L}f)(s)=(\mathcal{L}(f')')(s)=s(\mathcal{L}f')(s)+1=s[s(\mathcal{L}f)-1]+1=s^2(\mathcal{L}f)-s+1$.□

(β) Για α σταθερά $(\mathcal{L}e^{\alpha x}f(x))(s)=(\mathcal{L}f(x))(s-\alpha)$, για $s>\mathrm{Re}\,\alpha$. Η ιδιότητα αυτή της **μετάθεσης της μεταβλητής** (**shifting** property) μας παρέχει μεγάλες δυνατότητες υπολογισμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $(\mathcal{L}x e^{\iota x})(s)=(\mathcal{L}x)(s-\iota)=1/(s^2-2\iota s-1)$, για $s>0$ (γιατί;).

2 $(\mathcal{L}e^{-x}\cos x)(s)=(\mathcal{L}\cos x)(s+1)=(s+1)/(s^2+2s+2)$, για $s>0$ (γιατί;).□

(γ) Αν η f(x) είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ τότε $(\mathcal{L}xf(x)(s)=-(\mathcal{L}f(x)(s)'$, όπου στο β' σκέλος η παραγώγιση γίνεται ως προς s.(Ο αρχικός περιορισμός μπορεί να χαλαρώσει αλλά δεν θα μας απασχολήσουν τέτοιες λεπτομέρειες τουλάχιστον σε αυτήν την φάση της παρουσίασης)

Ας δούμε ένα παραδείγματα όπου έχουμε **διπλή** χρήση της (γ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η $(\mathcal{L}f)(s)$ είναι δις-παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τότε $(\mathcal{L}x^2f(x)(s)=(\mathcal{L}f(x)(s)''$, (γιατί;).

(**δ**) Αν η f(x) είναι συνεχής στο [0, +∞), τότε $(\mathcal{L}\int_0^t f(x)dx)(s)=(\mathcal{L}f(x)(s)/s$, s>0,

που πρακτικά μας λέει –στον αντίποδα της (α)- ότι ο μετ/σμός Laplace μετατρέπει την ολοκλήρωση σε απλή αλγεβρική διαίρεση με την νέα μεταβλητή. Εδώ θα μπορούσαμε να βαπτίσουμε την ιδιότητα αυτή ως «αργυρή»! Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας χρήσης της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f(x) στο [0, +∞) που επαληθεύουν την εξίσωση $t+\int_0^t f(x)dx = f(t)$. Βέβαια παρόμοια προβλήματα λύνονται στα πλαίσια του Απειρ.Λο. με χρήση του ΘΘΟΛ (βλ. Κεφ. 0) με βάση την παρατήρηση ότι το ολοκλήρωμα στο αριστερό σκέλος είναι παραγωγίσιμη στο [0, +∞) και άρα και το δεξιό σκέλος ως άθροισμα παραγωγίσιμων και μετά από παραγώγιση παίρνουμε την 1+f(t)= f΄(t) που είναι μία **Δ.Ε Χωριζομένων Μεταβλητών** με αρχική συνθήκη f(0)=0 (γιατί;). Ας δούμε την δύναμη του $\mathcal{L}$ τώρα και ιδιαίτερα της (δ). Με $\mathcal{L}$f=g παίρνουμε $(1/s^2)+(g(s)/s)=g(s)$ και τελικά $g(s)=(1/s\text{-}1)\text{-}(1/s)=\mathcal{L}(e^x-1)$ και επομένως $f(x)=e^x-1$.

(ΙΙ) Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Πριν να δώσουμε τον ορισμό του αμφίπλευρου μετ/σμού $\mathcal{L}$ σπεύδουμε να διευκρινίσουμε ότι δεν πρόκειται να του κάνουμε χρήση και μία πρόχειρη εξήγηση είναι η εξής:ο αμφίπλευρος ορίζεται επί κ.τ.σ. συναρτήσεων (μαζί και με άλλους περιορισμούς) f(x) ορισμένων σε όλο το (-∞, +∞). Μία τέτοια συνάρτηση μοντελοποιεί συνήθως αναλογικό σήμα που στο πεδίο του χρόνου έχει παρελθόν. Δηλαδή αν έχουμε f(t) ≠0 για κάποια t<0 (που είναι σύνηθες στο ψηφιακό σήμα) εμείς θα προτιμάμε στο παρόν εγχειρίδιο τον μετ/σμό Fourier που παρουσιάζεται στην Ενότητα 2.2.

Ορισμός του Αμφίπλευρου $\mathcal{L}$

$$(\mathcal{L}f)(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx\,.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η έννοια του εν λόγω καταχρηστικού ολοκληρώματος, για εκείνες τις f για τις οποίες συγκλίνει, είναι $\lim \int_{M}^{N} e^{-sx} f(x)dx$ καθώς $M\to-\infty$ και $N\to+\infty$. Συνήθως όμως προκειμένου να χαλαρώσουμε τις επί πλέον συνθήκες που θα απαιτούσαμε από τις f(x) θεωρούμε το ολοκλήρωνα ως $\lim \int_{-N}^{N} e^{-sx} f(x)dx$ καθώς $N\to+\infty$. Τότε μιλάμε για την **κυρία τιμή** (**principal value**) και την συμβολίζουμε θέτοντας κ.τ. ή pv μπροστά από το ολοκλήρωμα.

2. Προφανές ότι αν $f(x)=0$ για $x\leq 0$ τότε ο (μονόπλευρος) $\mathcal{L}$ και ο αμφίπλευρος $\mathcal{L}$ ταυτίζονται

2.2 Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ

Αν και η θεωρία του (συνεχούς!) μετ/μού **Fourier**, $\mathcal{F}$, ιστορικά, πρωτοεμφανίστηκε για να επιλύσει συγκεκριμένα προβλήματα που προέκυψαν από πειράματα κλασικής φυσικής στα τέλη του 17ου αιώνα (!), στην πορεία αναπτύχθηκε σε τέτοιο βαθμό που στηρίζει τη μελέτη του ψηφιακού σήματος παράλληλα με την «έκρηξη» της ανάπτυξης του hardware. Το ίδιο άλλωστε ισχύει και για τις **σειρές Fourier** που θα δούμε στην ενότητα 3.3. Σπεύδουμε αμέσως να εξηγήσουμε -ελπίζοντας ότι και θα διορθώσουμε μία αρκετά διαδεδομένη σε πολλές κατηγορίες σπουδαστών ή επαγγελματιών **παρανόηση** του όρου ψηφιακό σήμα. Εννοούμε, με την συνοπτική αυτή έκφραση, την γνωστή ψηφιακή επεξεργασία κάποιου αναλογικού σήματος (**ΨΕΣ** ή **DPS**). Δηλαδή **δεν** εννοούμε ότι είμαστε παγιδευμένοι σε έναν **καθαρό ψηφιακό κόσμο** όπου δεν υφίστανται πηγές αναλογικού σήματος!

Σε αντίθεση με την «ασάφεια» που σκόπιμα περιείχε η περιγραφή μας του συναρτησιακού δ.χ. V επί του οποίου έδρασε ο μετ/σμός Laplace, στην περίπτωση του $\mathcal{F}$ θα ορίσουμε, αμέσως μετά, τον V με αυστηρότητα. Πάντως η πλήρης μαθηματική περιγραφή ενός σήματος (μερικά στοιχεία της οποίας με σωστή καθοδήγηση ο αναγνώστης θα μπορούσε και να τα παραλείψει…) θα δοθεί στην ενότητα 5.1.