

3^ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Συνόρθωση Παρατηρήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η θεωρία των συνορθώσεων. Αναλύεται η βασική μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στις επιλύσεις. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων που παρουσιάστηκε εισαγωγικά στο προηγούμενο κεφάλαιο εφαρμόζεται και στη θεωρία των συνορθώσεων. Συγκεκριμένα γίνεται εστίαση σε δύο μεθόδους συνόρθωσης, αυτή των εξισώσεων παρατηρήσεων και των εξισώσεων συνθηκών. Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων η οποία είναι και η πιο διαδεδομένη μεθοδολογία από τις δύο παρουσιάζεται αναλυτικότερα με αρκετά παραδείγματα και στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

3.1. Εισαγωγή στη θεωρία των συνορθώσεων.

Το αντικείμενο της συνόρθωσης των παρατηρήσεων αφορά την επεξεργασία ενός πλήθους παρατηρήσεων με σκοπό την εύρεση της καλύτερης λύσης μεταξύ πολλών εναλλακτικών. Η επιλογή της βέλτιστης λύσης βασίζεται σε ένα κριτήριο ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων παρατήρησης, όπως το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων. Η επεξεργασία αυτή χρησιμοποιεί μεθόδους στατιστικής και πιθανοτήτων και αποσκοπεί στην δημιουργία αλγορίθμων που μπορούν να προγραμματιστούν σε έναν ΗΥ.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο απλά παρουσιάστηκε μια εισαγωγή στη μεθοδολογία συνόρθωσης. Οι συναρτήσεις και τα συστήματα που προέκυπταν ήταν απλής μορφής χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Στην περίπτωση όμως, όπου δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξισώσεις απλής μορφής (όπως η περίπτωση της ευθείας), τότε η μεθοδολογία με ελάχιστα τετράγωνα που ακολουθήθηκε δεν προκύπτει με απλά βήματα και θα πρέπει να καταφύγει κανείς σε μια πιο ολοκληρωμένη μεθοδολογία αντιμετώπισης. Επίσης το πλήθος των παρατηρήσεων πρέπει να είναι μεγάλο, προκειμένου να υπάρχει μεγαλύτερος έλεγχος αλλά και μεγαλύτερη αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Συνήθως στις Τοπογραφικές, Φωτογραμμετρικές, Χαρτογραφικές αλλά και σε άλλες εφαρμογές, τα προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν συνήθως περιλαμβάνουν πολύπλοκες εξισώσεις **μη γραμμικής μορφής**. Το πρόβλημα της γραμμικοποίησης των αρχικών μη γραμμικών εξισώσεων μπορεί να αντιμετωπιστεί με ανάλυση σε σειρές Taylor, μια διαδικασία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 7, ενώ για το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χρησιμοποιείται μια μεθοδολογία βασισμένη στο κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιώντας ανάλυση με πίνακες. Επισημαίνεται ότι το κομμάτι της δημιουργίας του αρχικού

συστήματος των γραμμικών εξισώσεων είναι διαφορετικό από αυτό της εφαρμογής των ελαχίστων τετραγώνων.

Οι δύο μέθοδοι συνορθωσης που παρουσιάζονται μέσα στο βιβλίο είναι:

- Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων. Στη μέθοδο αυτή οι άγνωστες παράμετροι συνδέονται μέσω εξισώσεων με απόλυτα γνωστές ποσότητες και με τις παρατηρήσεις. Βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου είναι στις εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα, το μέρος των αγνώστων παραμέτρων πρέπει να είναι πλήρως διαχωρισμένο από το μέρος των παρατηρήσεων. Η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων των παρατηρήσεων.
- Η μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών. Στη μέθοδο αυτή δεν χρησιμοποιούνται άγνωστες παράμετροι, αλλά ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα των παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας εξισώσεις συνθηκών οι οποίες θα πρέπει να ικανοποιούνται. Παράδειγμα για την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων μέτρησης των γωνιών ενός τριγώνου, η εξίσωση συνθήκης είναι ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου θα πρέπει να είναι 200 Grad.

3.1.1. Δημιουργία των εξισώσεων παρατηρήσεων.

Έστω ότι έχουν πραγματοποιηθεί (n) παρατηρήσεις ενός μεγέθους (y). Ως «παρατήρηση» εδώ θεωρείται οποιαδήποτε ποσότητα που μπορεί να παρατηρηθεί με χρήση κάποιας συσκευής. Για παράδειγμα, στη Τοπογραφία, ως συνήθεις παρατηρούμενες ποσότητες είναι οι γωνίες, οι αποστάσεις ή οι υψομετρικές διαφορές που μετρώνται στο πεδίο, με χρήση τοπογραφικών οργάνων. Σε άλλες περιπτώσεις, το ζητούμενο μπορεί να είναι η γεωαναφορά ενός ψηφιοποιημένου χάρτη, όπου στην

περίπτωση αυτή, ως παρατηρήσεις θεωρούνται οι συντεταγμένες x και y , που εκτιμώνται με το σταυρόνημα του ποντικιού, κατά την επιλογή των σημείων αναφοράς.

Οι αρχικές (n) παρατηρήσεις του (y) μεγέθους είναι συνδεδεμένες με κάποιες άγνωστες παραμέτρους, οι οποίες θα αποτελέσουν αντικείμενο υπολογισμών. Δηλαδή ζητούμενο είναι ο υπολογισμός των (m) αγνώστων παραμέτρων (x) που συνδέονται με τις παρατηρήσεις (y) μέσω γνωστών εξισώσεων (f).

Η γενική μορφή των εξισώσεων που συνδέουν τις παρατηρήσεις (y) με τις άγνωστες ποσότητες (x) είναι:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

Όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 2.1 η αληθής τιμή ενός μεγέθους που παρατηρείται είναι άγνωστη και μέσω των παρατηρήσεων (μετρήσεων) προσεγγίζεται. Η τιμή του μεγέθους παρατήρησης δεν είναι γνωστή, λόγω της ύπαρξης σφαλμάτων κατά τις παρατηρήσεις, π.χ. ο ίδιος παρατηρητής, με το ίδιο όργανο, κάτω από τις ίδιες συνθήκες, θα καταγράψει διαφορετικές παρατηρήσεις για το ίδιο παρατηρούμενο μέγεθος y . Η προσέγγιση αυτή θα ακολουθηθεί και εδώ και θα διαχωριστεί η πραγματική άγνωστη τιμή του μεγέθους που παρατηρείται, από τη μέτρηση του.

Συγκεκριμένα για τις \mathbf{y} παρατηρήσεις που περιλαμβάνουν σφάλματα, χρησιμοποιηθεί ο δείκτης \mathbf{a} για να συμβολίσει τις **πραγματικές** (στην πραγματικότητα **άγνωστες** τιμές των παρατηρούμενων ποσοτήτων), η παραπάνω σχέση 3.1 με αυτή τη σημειολογία γίνεται:

$$\mathbf{y}^a = \mathbf{f}(\mathbf{x}^a) \quad (3.2)$$

Οι άγνωστες παρατηρούμενες ποσότητες \mathbf{y}^a συνδέονται με τις παρατηρήσεις τους, αν ληφθεί υπόψη και το σφάλμα της κάθε παρατήρησης. Αν χρησιμοποιηθεί ο δείκτης \mathbf{b} , για να συμβολίσει τις παρατηρήσεις των y και τα σφάλματα των παρατηρήσεων περιληφθούν

στον πίνακα \mathbf{v} , τότε η σχέση που συνδέει τις παρατηρούμενες ποσότητες, με τις **πραγματικές** άγνωστες τιμές τους είναι:

$$\mathbf{y}^b = \mathbf{y}^a + \mathbf{v} \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας τη τελευταία σχέση 3.3 στην 3.2 προκύπτει τελικά το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης σε μορφή πινάκων :

$$\mathbf{y}^b = \mathbf{f}(\mathbf{x}^a) + \mathbf{v} \quad (3.4)$$

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς, οι αντίστοιχοι πίνακες της εξίσωσης 3.4 θα έχουν την μορφή :

$$\mathbf{y}^a_{nx1} = \begin{bmatrix} y_1^a \\ y_2^a \\ \vdots \\ y_n^a \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ο πίνακας των άγνωστων τιμών των παρατηρούμενων ποσοτήτων.

$$\mathbf{y}^b_{nx1} = \begin{bmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ \vdots \\ y_n^b \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ο πίνακας των παρατηρήσεων

$$\mathbf{x}^a_{nx1} = \begin{bmatrix} x_1^a \\ x_2^a \\ \vdots \\ x_m^a \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ο πίνακας των αγνώστων παραμέτρων και

$$\mathbf{v}_{nx1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

ο πίνακας των σφαλμάτων των παρατηρήσεων.

Η εξίσωση 3.4 μπορεί να γραφεί και σε μορφή συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{cases} y_1^b = f_1(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) + v_1 \\ y_2^b = f_2(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) + v_2 \\ \vdots \\ y_n^b = f_n(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) + v_n \end{cases} \quad (3.9)$$

Οι εξισώσεις 3.4 με μορφή πινάκων και 4.9 σε μορφή συστήματος, αποτελούν τις αρχικές εξισώσεις της μεθόδου των εξισώσεων παρατηρήσεων. Η μορφή των εξισώσεων $\mathbf{f}(\mathbf{x}^a)$ μπορεί να είναι **γραμμικής ή μη γραμμικής** μορφής.

Στην περίπτωση όπου οι αρχικές εξισώσεις είναι γραμμικής μορφής τότε το σύστημα 3.9 έχει τη μορφή

$$\begin{cases} y_1^b = a_{11}x_1^a + a_{12}x_2^a + \dots + a_{1m}x_m^a + v_1 \\ y_2^b = a_{21}x_1^a + a_{22}x_2^a + \dots + a_{2m}x_m^a + v_2 \\ \vdots \\ y_n^b = a_{n1}x_1^a + a_{n2}x_2^a + \dots + a_{nm}x_m^a + v_n \end{cases} \quad (3.10)$$

ή αντίστοιχα σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^a + \mathbf{v} \quad (3.11)$$

$\begin{matrix} nx1 & & nxm & mx1 & & nx1 \end{matrix}$

αναλυτικά οι πίνακες \mathbf{b} και \mathbf{A} θα έχουν στοιχεία:

$$\mathbf{b}_{nx1} = \begin{bmatrix} y_1^b \\ y_2^b \\ \vdots \\ y_n^b \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{A}_{nxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Στη περίπτωση όπου οι εξισώσεις παρατήρησης είναι **μη γραμμικής μορφής**, τότε πρέπει να γραμμικοποιηθούν, ώστε να είναι δυνατή η επίλυση τους, δηλαδή να μετατραπούν σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής 3.11. Η γραμμικοποίηση των αρχικών μη γραμμικών εξισώσεων γίνεται με τη χρήση του αναπτύγματος Taylor (βλ κεφ. 7). **Απαραίτητη προϋπόθεση** για την εφαρμογή των σειρών Taylor είναι η ύπαρξη **προσεγγιστικών** τιμών για τις άγνωστες παραμέτρους \mathbf{x}^a . Οι προσεγγιστικές τιμές συμβολίζονται με δείκτη (ο) στον εκθέτη. Ο

υπολογισμός των προσεγγιστικών τιμών δεν επιφέρει κάποια επιπρόσθετη δυσκολία στην διαδικασία, επειδή αυτές μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από τις αρχικές εξισώσεις με μια κλασική διαδικασία επίλυσης.

Τελικά η μορφή της i γραμμικοποιημένης εξίσωσης μετά την εφαρμογή του αναπτύγματος θα έχει τη μορφή:

$$y_i^a = f_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1^a} \right|_o (x_1^a - x_1^o) + \dots$$

$$\dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_m^a} \right|_o (x_m^a - x_m^o)$$
(3.13)

Οι τελικές εξισώσεις δημιουργούνται χρησιμοποιώντας μόνο τον πρώτο όρο από την σειρά Taylor, γιατί η χρήση των όρων μεγαλύτερης τάξεως θα μας οδηγούσε επίσης σε μη γραμμικές εξισώσεις.

Στη σχέση 3.13, ο εκθέτης (ο) δηλώνει προσεγγιστικές τιμές, συνεπώς και η σχέση $\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_m^a} \right|_o$ δηλώνει υπολογισμό της μερικής παραγώγου με τη χρήση προσεγγιστικών τιμών για τις άγνωστες παραμέτρους.

Τελικά το σύστημα μετά την γραμμικοποίηση, έχει την μορφή:

$$\underset{nx1}{\mathbf{b}} = \underset{nxm}{\mathbf{A}} \cdot \underset{mx1}{\mathbf{x}} + \underset{nx1}{\mathbf{v}}$$
(3.14)

Όπου εδώ οι πίνακες \mathbf{b} , \mathbf{A} και \mathbf{v} έχουν στοιχεία:

$$\underset{nx1}{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} y_1^b - y_1^o \\ y_2^b - y_2^o \\ \vdots \\ y_n^b - y_n^o \end{bmatrix}$$
(3.15)

$$\underset{nxm}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^a} (\mathbf{x}^o)$$
(3.16)

Τα επιμέρους στοιχεία a_{ij} του πίνακα \mathbf{A} θα ισούται με :

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1^a}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), \dots, a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_m^a}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (3.17)$$

$$a_{n1} = \frac{\partial f_n}{\partial x_1^a}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), \dots, a_{nm} = \frac{\partial f_n}{\partial x_m^a}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (3.18)$$

Παρατήρηση: Η χρήση των σειρών Taylor έχει ως σκοπό, να μετατραπούν οι αρχικές μη-γραμμικές εξισώσεις σε εξισώσεις γραμμικής μορφής. Η χρήση όμως μόνο του πρώτου όρου από τη σειρά διευκολύνει μεν την κατάστρωση των εξισώσεων, αφήνει όμως ένα υπολειπόμενο σφάλμα, το οποίο περιλαμβάνεται στους επόμενους όρους του αναπτύγματος. Προκειμένου να επιτευχθεί μια ικανοποιητική προσέγγιση, θα πρέπει ο αλγόριθμος να επαναληφθεί κάποιες φορές, χρησιμοποιώντας στην επόμενη επανάληψη, ως προσεγγιστικές τιμές τις τελικές συνορθωμένες της προηγούμενης επίλυσης.

και ο πίνακας των αγνώστων θα έχει τη μορφή :

$$\mathbf{x}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} x_1^a - x_1^0 \\ x_2^a - x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^a - x_n^0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ο παραπάνω πίνακας \mathbf{x} δεν είναι ο ζητούμενος πίνακας \mathbf{x}^a αλλά οι άγνωστες παράμετροι έχουν αντικατασταθεί με τη διαφορά των αγνώστων παραμέτρων από τις προσεγγιστικές τους τιμές:

$$\mathbf{x}_{m \times 1} = \mathbf{x}_{m \times 1}^a - \mathbf{x}_{m \times 1}^0 = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

3.1.2. Επίλυση συστήματος κανονικών εξισώσεων.

Το σύστημα 3.14 των εξισώσεων παρατήρησης, για την περίπτωση όπου ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων είναι ίσος με τον αριθμό των παρατηρήσεων, έχει μια και μόνη λύση και δεν μπορεί να γίνει εκτίμηση σφαλμάτων.

Γενικά επιδιώκεται να υπάρχουν περισσότερες παρατηρήσεις από τις άγνωστες παραμέτρους, για να είναι δυνατή και η εκτίμηση των σφαλμάτων. Η εκτίμηση των σφαλμάτων και η επιλογή της βέλτιστης λύσης, βασίζεται στην εφαρμογή του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων.

Η εφαρμογή της **μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων** δίνει τη λύση $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{v}}$, που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N p_i v_i^2 = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 = \min \quad (3.21)$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\varphi = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \min \quad (3.22)$$

Τα στοιχεία p_i ονομάζονται **βάρη** των αντίστοιχων παρατηρήσεων b , και ο πίνακας \mathbf{P} ονομάζεται πίνακας βάρους.

Το σύστημα των αρχικών εξισώσεων $\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}$, αν και πλέον είναι γραμμικό, παρόλα αυτά, δεν μπορεί ακόμη να λυθεί εξαιτίας των σφαλμάτων \mathbf{v} .

Η εφαρμογή του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων για την περίπτωση των παραπάνω εξισώσεων παρατήρησης, οδηγεί στις παρακάτω τελικές σχέσεις:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (3.23)$$

ή

$$\hat{\mathbf{x}}_{mx\ 1} = \mathbf{N}_{mxm}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{mx\ 1} \quad (3.24)$$

Οι πίνακες του αρχικού συστήματος αλλάζουν και δημιουργούνται δύο νέοι πίνακες οι \mathbf{N} και \mathbf{u} . Οι πίνακες \mathbf{N} και \mathbf{u} καλούνται πίνακες του συστήματος των κανονικών εξισώσεων που προκύπτουν από τις παρακάτω πράξεις πινάκων:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \quad (3.25)$$

$m \times m$ $m \times n$ $n \times n$ $n \times m$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} \quad (3.26)$$

$m \times 1$ $m \times n$ $n \times n$ $n \times m$

Ο πίνακας \mathbf{N} είναι κανονικός πίνακας. Ένας τετραγωνικός πίνακας $m \times m$ καλείται είναι κανονικός πίνακας όταν ισχύει:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T - \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

$m \times m$ $m \times m$ $m \times m$ $m \times m$ $m \times m$

όπου $\mathbf{0}$ ο μηδενικός πίνακας και \mathbf{N}^T ο ανάστροφος πίνακας του \mathbf{N} .

Ο πίνακας \mathbf{N} είναι τετραγωνικός διαστάσεων $m \times m$, όπου m ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων και αντίστοιχα ο πίνακας \mathbf{u} έχει διαστάσεις $m \times 1$. Η τελική λύση αναλυτικά μπορεί να γραφεί:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} \quad (3.28)$$

Βασική προϋπόθεση για να επιλυθεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων είναι ο πίνακας \mathbf{N} να είναι **αντιστρέψιμος**, δηλαδή να υπάρχει ο \mathbf{N}^{-1} .

Η απροσδιοριστία συνήθως προκύπτει όταν το φυσικό πρόβλημα δεν μπορεί να οριστεί, παράδειγμα μια τέτοιας περίπτωσης είναι όταν σε ένα τριγωνομετρικό δίκτυο δεν ορίζεται το σύστημα αναφοράς του ή το σχήμα του δικτύου. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν επιπρόσθετες δεσμεύσεις. Οι εξισώσεις παρατήρησης με δεσμεύσεις παρουσιάζονται σε παραδείγματα στη συνέχεια.

Παρατήρηση: Η χρήση των σειρών Taylor έχει σαν σκοπό την δημιουργία γραμμικών εξισώσεων και δεν πρέπει να συγχέεται με την εφαρμογή του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων.

Η ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τους τύπους $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ και $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}$ για τον υπολογισμό των τελικών κανονικών εξισώσεων. Πρακτικά αυτό ερμηνεύεται ως «συμπύκνωση» όλων των αρχικών εξισώσεων παρατήρησης σε ένα τελικό σύστημα αυτό των κανονικών εξισώσεων $n \times n$.

Ο πίνακας \mathbf{P} καλείται πίνακας βάρους και δηλώνει το ποσό της συμμετοχής (το βάρος) της κάθε παρατήρησης στη συνολική λύση. Ο πίνακας \mathbf{P} είναι ένας συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας διαστάσεων $n \times n$, όπου n ο αριθμός των παρατηρήσεων. Συνήθως λαμβάνεται ως διαγώνιος για την περίπτωση ασυσχέτιστων παρατηρήσεων. Τα στοιχεία της διαγωνίου είναι τα βάρη p των παρατηρήσεων ίσα με το αντίστροφο της εκάστοτε μεταβλητότητας, δηλαδή $p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$, σε αυτή την περίπτωση

ο πίνακας βάρους θα έχει την μορφή:

$$\mathbf{P}_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & & \\ & & p_3 & \vdots \\ \vdots & & & p_4 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & p_n \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Οι τιμές των βαρών είναι αντιστρόφως ανάλογες με αυτές των μεταβλητοτήτων σ_i^2 των παρατηρήσεων, οπότε όσο μεγαλύτερη ακρίβεια έχουν οι παρατηρήσεις (μικρές τιμές των σ_i^2), τόσο μεγαλύτερο βάρος έχουν αυτές στην επίλυση. Στην περίπτωση όπου οι παρατηρήσεις γίνουν

με την ίδια ακρίβεια, τα βάρη μπορούν να θεωρηθούν ίσα με την μονάδα, οπότε και ο πίνακας βάρους είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Παρατήρηση: Στον πίνακα βάρους \mathbf{P} μη μηδενικές τιμές έχουν μόνο τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν. Αυτή η μορφή εμφανίζεται όταν θεωρηθεί ότι οι παρατηρήσεις είναι ασυσχέτιστες. Συνήθως στις εφαρμογές οι παρατηρήσεις είναι **ασυσχέτιστες**, θεωρώντας ότι έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα μεταξύτες, δηλαδή είναι απαλλαγμένες από συστηματικά σφάλματα.

Η επίλυση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων οδηγεί στην βέλτιστη εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων \mathbf{x} , γι' αυτό και οι τελικές εκτιμήσεις των \mathbf{x} εμφανίζονται με τον συμβολισμό $\hat{\mathbf{x}}$.

Στην περίπτωση των μη γραμμικών εξισώσεων, ο πίνακας $\hat{\mathbf{x}}$ είναι ο πίνακας των εκτιμήσεων των διαφορών από τις προσεγγιστικές τιμές, δηλαδή :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}x_1 \\ \hat{\delta}x_2 \\ \vdots \\ \hat{\delta}x_m \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Οπότε οι τελικές εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων θα προκύψουν αν προσθέσουμε στις προσεγγιστικές τιμές τις εκτιμήσεις των διαφορών $\hat{\mathbf{x}}$ που υπολογίσαμε, δηλαδή :

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^o \quad (3.31)$$

όπου ο πίνακας των προσεγγιστικών τιμών των αγνώστων παραμέτρων είναι:

$$\hat{\mathbf{x}}^o = \begin{bmatrix} X_1^o \\ X_2^o \\ \vdots \\ X_m^o \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Ενώ ο πίνακας των εκτιμήσεων των αγνώστων:

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \begin{bmatrix} \hat{X}_1^a \\ \hat{X}_2^a \\ \vdots \\ \hat{X}_m^a \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Στην περίπτωση των εξαρχής γραμμικών εξισώσεων υπολογίζεται απευθείας ο πίνακας $\hat{\mathbf{x}}^a$ από την επίλυση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων, δηλαδή:

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{u} \quad (3.34)$$

3.2. Εκτίμηση των σφαλμάτων μετά τη συνόρθωση.

Η μεθοδολογία της συνόρθωσης βασίζεται στην ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων, συνεπώς τα τελικά αποτελέσματα θα πρέπει να συνοδεύονται και από εκτίμηση αυτών των ποσοτήτων.

Συγκεκριμένα, η μεθοδολογία της συνόρθωσης επιτρέπει να εκτιμηθούν τα σφάλματα των παρατηρήσεων μετά τη επεξεργασία και την εξαγωγή των τελικών αποτελεσμάτων, όπως επίσης και των ακριβειών με τις οποίες υπολογίζονται οι άγνωστες παράμετροι. Αναλυτικά οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων των παρατηρήσεων δίνονται από τον πίνακα $\hat{\mathbf{v}}$ με στοιχεία:

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \vdots \\ \hat{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

όπου \hat{v}_i το σφάλμα κάθε παρατήρησης.

Ο πίνακας $\hat{\mathbf{v}}$ μπορεί να υπολογιστεί από το αρχικό σύστημα των εξισώσεων, αν αντικατασταθεί ο πίνακας των αγνώστων \mathbf{x} με τον πίνακα των εκτιμήσεων των αγνώστων $\hat{\mathbf{x}}$, ο οποίος έχει υπολογιστεί μέσω της διαδικασίας της συνόρθωσης, δηλαδή :

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{v}} \Rightarrow \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (3.36)$$

Επίσης, αν αντικατασταθούν οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων $\hat{\mathbf{v}}$ στην αρχική εξίσωση 3.3 τότε μπορεί να υπολογιστεί και μια εκτίμηση των παρατηρήσεων $\hat{\mathbf{y}}^a$, δηλαδή :

$$\hat{\mathbf{y}}^a = \mathbf{y}^b - \hat{\mathbf{v}} \quad (3.37)$$

Τέλος έχοντας υπολογίσει την εκτίμηση των σφαλμάτων μπορεί να εκτιμηθεί και η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς $\hat{\sigma}^2$, ποσότητα που εκφράζει τη συνολική εκτίμηση της ακρίβειας των μετρήσεων και δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{f} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{n - m} \quad (3.38)$$

Στην εξίσωση της τυπικής απόκλισης της μεταβλητότητας αναφοράς, ο αριθμός f καλείται βαθμοί ελευθερίας και ισούται με $f = n - m$, όπου n ο αριθμός των παρατηρήσεων και m ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων.

Ο πίνακας $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}}$ (βλ. κεφάλαιο 1) με τις εκτιμήσεις των μεταβλητοτήτων συμμεταβλητοτήτων των αγνώστων παραμέτρων, θα είναι:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2 \cdot \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{x}_1}^2 & \sigma_{\hat{x}_1} \sigma_{\hat{x}_2} & \dots & \sigma_{\hat{x}_1} \sigma_{\hat{x}_m} \\ \sigma_{\hat{x}_2} \sigma_{\hat{x}_1} & \sigma_{\hat{x}_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{\hat{x}_m} \sigma_{\hat{x}_1} & \dots & & \sigma_{\hat{x}_m}^2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

ενώ, για τις παρατηρήσεις ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{y}} = \hat{\sigma}^2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T) = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{y}_1}^2 & \sigma_{\hat{y}_1} \sigma_{\hat{y}_2} & \cdots & \sigma_{\hat{y}_1} \sigma_{\hat{y}_n} \\ \sigma_{\hat{y}_2} \sigma_{\hat{y}_1} & \sigma_{\hat{y}_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{\hat{y}_n} \sigma_{\hat{y}_1} & \cdots & & \sigma_{\hat{y}_n}^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Παρατήρηση: Στον πίνακα $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{x}}$ των μεταβλητοτήτων – συμμεταβλητοτήτων, επειδή οι εκτιμήσεις των τιμών x είναι συσχετισμένες, οι τιμές των μη διαγώνιων στοιχείων δεν είναι μηδέν ενώ στον πίνακα $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{y}}$ υπολογίζονται και οι εκτιμήσεις των πιθανών συσχετίσεων που προκύπτουν.

3.3. Παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου των εξισώσεων παρατηρήσεων.

Τα δύο παραδείγματα που παρουσιάζονται αφορούν την εφαρμογή της μεθόδου των εξισώσεων παρατηρήσεων, σε γραμμικής μορφής εξισώσεις το ένα και σε μη γραμμικής μορφής εξισώσεις το δεύτερο. Στα κεφάλαια 4 και 5 παρατίθενται εκτενέστερα παραδείγματα σε διάφορα πεδία εφαρμογής.

Το πρόβλημα γραμμικής μορφής που παρουσιάζεται αφορά τη εύρεση της βέλτιστη εξίσωση ευθείας, πρόβλημα που αναλύθηκε και στο κεφάλαιο 2. Εσκεμμένα έγινε αυτή η επιλογή προκειμένου να συγκριθούν οι δύο μεθοδολογίες. Από τη στιγμή που η θεωρητική προσέγγιση δεν αλλάζει, αναμενόμενο είναι να προκύψουν τα ίδια αποτελέσματα.

Το μη γραμμικό πρόβλημα που εξετάζεται αφορά μια οπισθοτομία με αποστάσεις για τον υπολογισμό των συντεταγμένων ενός αγνώστου σημείου. Η συγκεκριμένη εφαρμογή δεν έχει κάποια χρηστική σημασία

αυτοτελώς, αφού η μέτρηση με τοπογραφικό όργανο αποστάσεων από τριγωνομετρικά που απέχουν κάποια χιλιόμετρα μεταξύ τους είναι πρακτικά ασύμφορη. Ο συγκεκριμένος όμως αλγόριθμος μπορεί κάλλιστα να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις μικρών αποστάσεων (π.χ. εξασφαλίσεις) και επεκτεινόμενος στις τρεις διαστάσεις χρησιμοποιείται στον απόλυτο προσδιορισμό θέσης με GPS (Φωτίου Α., Πικριδάς Χ., 2012). Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων που προκύπτουν από παρατηρήσεις αποστάσεων είναι σχετικά απλή και αυτό αποτελεί και μια καλή πρώτη εξοικείωση με τη μεθοδολογία.

3.3.1. Βέλτιστη προσαρμογή ευθείας με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.

Η μεθοδολογία για την εύρεση βέλτιστης εξίσωσης ευθείας παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3, σε αυτό το κεφάλαιο θα αντιμετωπιστεί το ίδιο πρόβλημα, εφαρμόζοντας την μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.

Έστω, μια ευθεία, η οποία προσεγγίζεται από n σημεία τα (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) , με $n \geq 2$. Η εξίσωση της ευθείας του τα προσεγγίζει δίνεται από τη σχέση:

$$y = a \cdot x + b \quad (3.41)$$

Οι άγνωστες ποσότητες του προβλήματος είναι οι παράμετροι a και b και παρατηρήσεις οι συντεταγμένες x , y των σημείων. Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων πρέπει στις εξισώσεις οι παρατηρούμενες ποσότητες να είναι διαχωρισμένες από τις άγνωστες τιμές, κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει για τη σχέση 3.41, για το λόγο αυτό θα θεωρηθούν οι τιμές x_i απόλυτα γνωστές ποσότητες και

παρατηρήσεις μόνο οι παράμετροι y . Συνεπώς τα σφάλματα θα συμπεριληφθούν όλα στη παράμετρο y .

Η παραπάνω εξίσωση 3.41 είναι γραμμική οπότε δεν απαιτείται η γραμμικοποίηση κατά Taylor και κατά συνέπεια δεν απαιτούνται προσεγγιστικές τιμές για τις άγνωστες ποσότητες, αλλά ούτε και για τις παρατηρούμενες ποσότητες. Σε αυτή την περίπτωση το γραμμικό σύστημα των n εξισώσεων έχει την μορφή :

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b \\ y_2 = a \cdot x_2 + b \\ \vdots \\ y_n = a \cdot x_n + b \end{cases} \quad (3.42)$$

και σε μορφή πινάκων το παραπάνω σύστημα 3.42 γράφεται:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \text{ με}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ και ο πίνακας } \hat{\mathbf{x}}^a = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις είναι ισοβαρείς και ανεξάρτητες μεταξύ τους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας βάρους είναι ο μοναδιαίος $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, σε αυτή την περίπτωση οι σχέσεις απλοποιούνται και θα είναι:

$$\hat{\mathbf{x}}^a = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{u} \quad (3.43)$$

με $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ και $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$ και τελικά

$$\hat{\mathbf{x}}^a = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \quad (3.44)$$

Κάνοντας τις πράξεις πινάκων προκύπτει :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Όπου για τον αντίστροφο πίνακα $\mathbf{N} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ (βλ. κεφ. 7 για αντιστροφή πίνακα 2x2), προκύπτει :

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \begin{bmatrix} n & - \sum_{i=1}^n x_i \\ - \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

και τελικά ο πίνακας $\hat{\mathbf{x}}^a$ θα ισούται:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^a = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u} &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \begin{bmatrix} n & - \sum_{i=1}^n x_i \\ - \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \begin{bmatrix} n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \\ - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{\mathbf{x}}^a = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{bmatrix} \quad (3.48) \end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις επαληθεύουν αυτές που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο 2.2.1.

3.3.2. Πολλαπλή οπισθοτομία αποστάσεις.

Το ζητούμενο σε αυτό το παράδειγμα είναι ο υπολογισμός των συντεταγμένων (x, y) ενός αγνώστου σημείου, όταν έχουν μετρηθεί οι αποστάσεις από 4 τριγωνομετρικά προς αυτό.

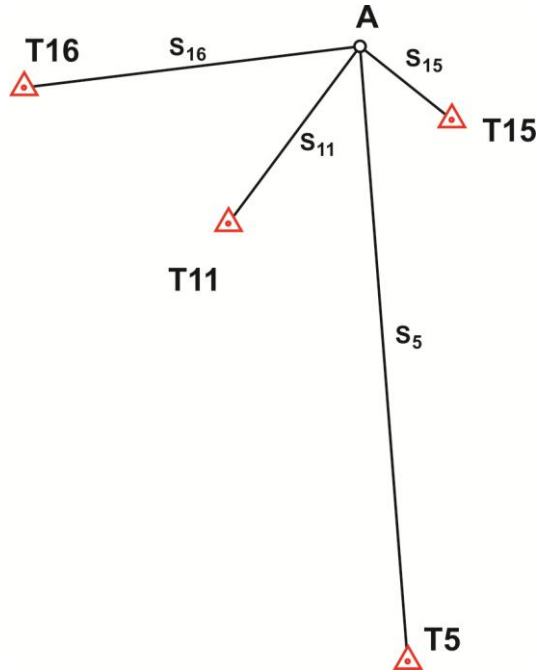
Η προσεγγιστική θέση του σημείου δίνεται ότι είναι $(471532, 4424860)$, ενώ οι συντεταγμένες των τριγωνομετρικών και οι μετρημένες αποστάσεις από τα τριγωνομετρικά δίνονται στους πίνακες 3.1 και 3.2.

Οι εξισώσεις παρατήρησης για κάθε i παρατήρηση απόστασης από τριγωνομετρικό είναι:

$$s_i^a = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \quad (3.49)$$

Οι προσεγγιστικές τιμές για τις αποστάσεις προκύπτουν από την εξίσωση της απόστασης, αν χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγιστικές τιμές του αγνώστου σημείου:

$$s_i^o = \sqrt{(x_i - x^o)^2 + (y_i - y^o)^2} \quad (3.50)$$



Σχήμα 3. 1. Προσδιορισμός συντεταγμένων σημείου με οπισθοτομία και μέτρηση αποστάσεων από τέσσερα γνωστά σημεία.

Οι επιμέρους πίνακες για το σύστημα $\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}$ θα έχουν την δομή :

$$\mathbf{y}^b = \begin{bmatrix} s_1^b \\ s_2^b \\ \vdots \\ s_n^b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^o = \begin{bmatrix} s_1^o \\ s_2^o \\ \vdots \\ s_n^o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{y}^b - \mathbf{y}^o = \begin{bmatrix} s_1^b - s_1^o \\ s_2^b - s_2^o \\ \vdots \\ s_n^b - s_n^o \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

και

$$\mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} d\hat{x} \\ d\hat{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} x^a \\ y^a \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^o \quad (3.52)$$

Οι παρατηρούμενες αποστάσεις S^b από τα τριγωνομετρικά προς το άγνωστο σημείο και οι προσεγγιστικές συντεταγμένες S^o που προκύπτουν την εφαρμογή του τύπου 3.49 δίνονται στον πίνακα 3.2.

Πίνακας 3. 1. Συντεταγμένες γνωστών σημείων.

	E(m)	N(m)
T5	471895.301	4419157.063
T11	470066.433	4423062.928
T15	472336.931	4424320.487
T16	468177.513	4424511.997

Πίνακας 3. 2. Παρατηρήσεις και προσεγγιστικές τιμές των αποστάσεων.

	S^o (m)	S^b (m)
Σ5	5714.497	5712.489
Σ11	2318.912	2319.208
Σ15	969.014	965.707
Σ16	3372.490	3375.018

Με βάση τον πίνακα 3.2. οι πίνακες των παρατηρήσεων \mathbf{y}^b και \mathbf{y}^o γίνονται:

$$\mathbf{y}^b = \begin{bmatrix} s_5^b \\ s_{11}^b \\ s_{15}^b \\ s_{16}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5712.489 \\ 2319.208 \\ 965.707 \\ 3375.018 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{y}^o = \begin{bmatrix} s_5^o \\ s_{11}^o \\ s_{15}^o \\ s_{16}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5714.497 \\ 2318.912 \\ 969.014 \\ 3372.490 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

και συνεπώς ο πίνακας \mathbf{b} θα ισούται:

$$\mathbf{b} = \mathbf{y}^b - \mathbf{y}^o = \begin{bmatrix} -2.008 \\ 0.296 \\ -3.307 \\ 2.528 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$