ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

3.1 ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ – ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Η θεωρία Πιθανοτήτων είναι ένας κλάδος των μαθηματικών και έχει σαν αντικείμενο την μελέτη των νόμων που διέπουν τα λεγόμενα τυχαία φαινόμενα.

Τυχαίο φαινόμενο ή **πείραμα τύχης** είναι μία διαδικασία, η οποία κάθε φορά που επαναλαμβάνεται, κάτω από τις ίδιες, θεωρητικά συνθήκες, μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερα από ένα αποτελέσματα, χωρίς να είναι δυνατόν να προβλέψουμε εκ των προτέρων το αποτέλεσμα .

Στα τυχαία φαινόμενα δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα ποιο αποτέλεσμα θα πραγματοποιηθεί σε κάθε επανάληψη (δοκιμή) του τυχαίου φαινομένου, όπως συμβαίνει με τα **προσδιορίσιμα** (deterministic) ή **αιτιοκρατικά φαινόμενα**, τα οποία ακολουθούν συγκεκριμένους νόμους, και υπό την επίδραση ορισμένου αιτίου, σε κάθε επανάληψη του πειράματος, πραγματοποιείται πάντοτε το ίδιο αποτέλεσμα. Π.χ. όταν το απιονισμένο νερό θερμαίνεται στους 100 βαθμούς Κελσίου, σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, μετατρέπεται σε ατμό.

Ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται ένα σώμα για να διανύσει ορισμένη απόσταση σε κενό αέρος, μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια. Αν ρίξουμε ένα ζάρι, είναι βέβαιο ότι υπό την επίδραση της βαρύτητας θα πέσει στο έδαφος, αλλά δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποια όψη του θα εμφανισθεί.

Στην τύχη αποδίδονται όλα τα φαινόμενα, τα οποία λόγω αγνοίας δεν μπορούμε να περιγράψουμε με τους νόμους της αιτιότητας.

Τυχαίες διαδικασίες είναι:

- Η ρίψη ενός νομίσματος
- Το φύλο νεογέννητου σε μία σειρά γεννήσεων

- Η κλήρωση ενός λαχείου
- Η ημερήσια ζήτηση προϊόντος
- Ο αριθμός ελαττωματικών προϊόντων, που παράγονται ανά ώρα σε ένα εργοστάσιο
- Ο χρόνος αναμονής σε σημείο εξυπηρέτησης
- Ο αριθμός των οχημάτων που διέρχονται από ένα φωτεινό σηματοδότη, σε ορισμένο χρονικό διάστημα

Σε περιπτώσεις όπως αυτές, δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε με ακρίβεια τι θα συμβεί, διότι το αποτέλεσμα εξαρτάται κάθε φορά από απρόβλεπτους παράγοντες.

Γεγονότα όπως "Κεφαλή - Γράμματα", "Αγόρι – Κορίτσι" "ελαττωματικό – μη ελαττωματικό" κ.λπ. καλούνται τυχαία γεγονότα ή **ενδεχόμενα**, διότι ενδέχεται να εμφανισθούν σε κάθε επανάληψη του τυχαίου φαινομένου.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων, που εμφανίζονται σ' ένα πείραμα τύχης, καλείται **δειγματικός χώρος** (Sample Space) και συμβολίζεται με **Ω.**

Ενδεχόμενο ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Τα ενδεχόμενα που αποτελούνται από ένα μόνο στοιχείο του δειγματικού χώρου, ονομάζονται **απλά** ή **στοιχειώδη** ενδεχόμενα, ενώ εκείνα που αποτελούνται από περισσότερα στοιχεία, καλούνται **σύνθετα** ενδεχόμενα.

Παραδείγματος χάριν στη ρίψη ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι Ω={1,2,3,4,5,6}. Στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι A = {εμφάνιση άσσου } = { 1 }, B= {εμφάνιση δύο } = { 2 } κ.λπ., ενώ σύνθετο είναι το ενδεχόμενο Γ = {άρτια ένδειξη } = { 2, 4, 6 }.

Το ενδεχόμενο A "πραγματοποιείται", όταν το αποτέλεσμα που εμφανίζεται σε μία επανάληψη του πειράματος τύχης αποτελεί στοιχείο του ενδεχομένου A. Ο δειγματικός χώρος, θεωρούμενος σαν σύνθετο ενδεχόμενο, αποτελεί το λεγόμενο "**βέβαιο**" ενδεχόμενο, διότι πραγματοποιείται σε κάθε επανάληψη του πειράματος τύχης.

Ένας δειγματικός χώρος, ο οποίος αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό ενδεχομένων καλείται **διακριτός**, ενώ αν αποτελείται από μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, ονομάζεται **συνεχής**. Ένας συνεχής δειγματικός χώρος ισοδυναμεί με ένα διάστημα τιμών.

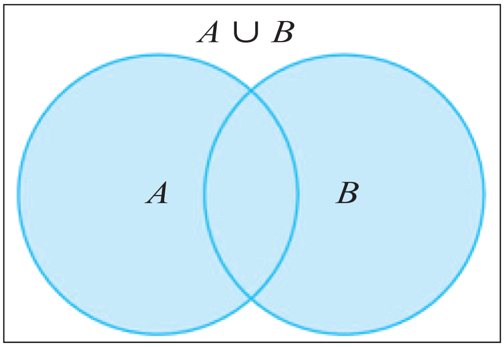
Βασικές πράξεις μεταξύ των ενδεχομένων

Εφ' όσον θεωρούμε τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης σαν υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, χρησιμοποιούμε έννοιες και συμβολισμούς από την θεωρία συνόλων.

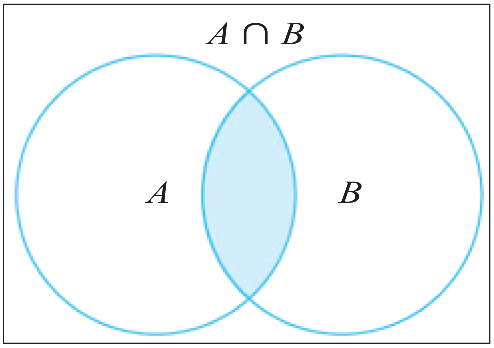
Το ενδεχόμενο, το οποίο δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί σε καμία δοκιμή, δηλαδή δεν περιέχει κανένα στοιχείο, καλείται **αδύνατο** ενδεχόμενο και συμβολίζεται με $\varnothing$.

Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.

Η **ένωση** δύο ενδεχομένων, συμβολίζεται με $\mathbf{A \cup B}$, είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

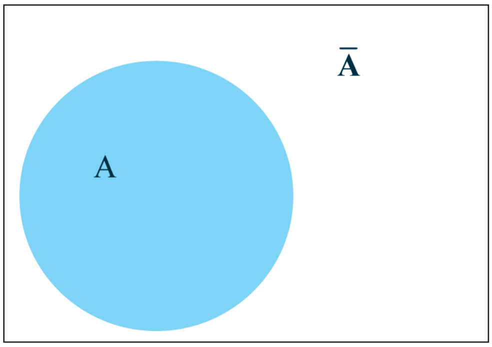


Η **τομή** δύο ενδεχομένων, συμβολίζεται με $\mathbf{A \cap B}$, είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα Α και Β.



Δύο ενδεχόμενα Α, Β ονομάζονται **ασυμβίβαστα ή ξένα** μεταξύ τους, ή αμοιβαία αποκλειόμενα, όταν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου ενδεχομένου και ισχύει $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$.

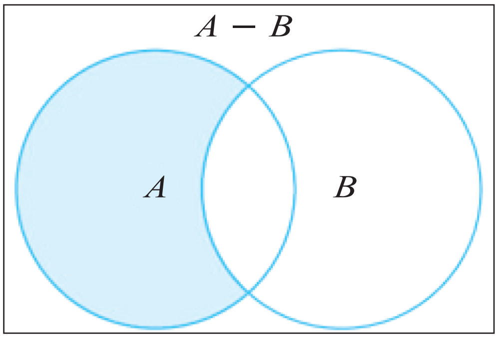
Δύο ενδεχόμενα λέγονται **συμπληρωματικά**, όταν είναι ξένα και η ένωσή τους είναι ο δειγματικός χώρος. Το συμπληρωματικό του Α συμβολίζεται με $\overline{\mathbf{A}}$ ή με A^c και είναι το ενδεχόμενο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στον δειγματικό χώρο Ω αλλά όχι στο ενδεχόμενο Α.



Ισχύει $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{A}} = \varnothing$

$\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega}$

Η **διαφορά Α – Β** είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το Α χωρίς να πραγματοποιείται το Β.



Ισχύει $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°

Πείραμα τύχης	**Δειγματικός χώρος**
Ρίψη ενός ζαριού	Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Έστω τα ενδεχόμενα A= { ένδειξη άρτιος αριθμός } = {2, 4, 6 }
B ={ ένδειξη περιττός αριθμός } = {1, 3, 5}
Γ ={ ένδειξη πρώτος αριθμός } = {2, 3, 5}

Τα ενδεχόμενα να εμφανισθεί:

α) άρτιος ή πρώτος αριθμός
β) περιττός πρώτος αριθμός
γ) δεν εμφανίζεται πρώτος αριθμός
δ) άρτιος μη πρώτος αριθμός, είναι:

α) $A \cup \Gamma = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$
β) $B \cap \Gamma = \{ 3, 5 \}$
γ) $\overline{\Gamma} = \{ 1, 4, 6 \}$
δ) $A - \Gamma = \{ 4, 6 \}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2°

Πείραμα τύχης	**Δειγματικός χώρος**
Ρίψη τριών νομισμάτων	Ω = {ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΓΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ}

Έστω τα ενδεχόμενα
A= {εμφάνιση όψης “Γ” δύο ή τρεις φορές διαδοχικά} = { ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΚΓΓ }
B ={ίδια ένδειξη} = { ΓΓΓ, ΚΚΚ }
Ένωση $\mathbf{A \cup B}$ = { ΓΓΓ, ΓΓΚ, ΚΓΓ, ΚΚΚ}

Τομή $\mathbf{A \cap B}$ = {ΓΓΓ} **Διαφορά** **A - B** = {ΓΓΚ, ΚΓΓ}
Το ενδεχόμενο να εμφανισθεί η όψη “Γ” 4 φορές είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Όπως αναφέρθηκε, σε κάθε επανάληψη ενός τυχαίου φαινομένου, υπάρχει αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα θα συμβεί.

Η πιθανότητα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αριθμητικό μέτρο, που εκφράζει τον βαθμό βεβαιότητας να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο A, και συμβολίζεται με **P (A)**.

Η πιθανότητα έχει ορισθεί με διαφόρους τρόπους, οι οποίοι αντικατοπτρίζουν την διαφορετική θεωρητική προσέγγιση, για την θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων.

Η θεωρία πιθανοτήτων ξεκίνησε αρχικά από την μελέτη διαφόρων τυχερών παιχνιδιών, όπως το παιχνίδι με δύο ή τρία ζάρια. Γενικότερες μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων που είχαν σχέση με τυχερά παιχνίδια αναπτύχθηκαν τον 17^{ο} αιώνα από τους μαθηματικούς Blaise Pascal (1623 –1662) και Pierre de Fermat (1601 –1665), οι οποίοι αντάλλασσαν απόψεις για προβλήματα που έθετε στον Pascal ο επαγγελματίας παίκτης της εποχής ιππότης de Meré. Ένα από τα προβλήματα που έθεσε στον Pascal ήταν το εξής: Τι από τα εξής είναι πιο πιθανό: Να εμφανισθεί τουλάχιστον μία φορά 6 ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές ή να εμφανισθεί τουλάχιστον μία φορά (6,6) (εξάρες) ρίχνοντας δύο ζάρια 24 φορές; Εκ πρώτης όψεως τα δύο ενδεχόμενα έχουν την ίδια πιθανότητα, δεδομένου ότι 4* 1/6 = 24 *1/36. O de Meré παρατήρησε όμως εμπειρικά διαφορά στις παρατηρούμενες συχνότητες. Το πρόβλημα επιλύεται με εφαρμογή της διωνυμικής κατανομής και αποδεικνύεται ότι στην πρώτη περίπτωση, η πιθανότητα είναι P (τουλάχιστον ένα 6) =0.518 και στη δεύτερη P (τουλάχιστον μία φορά (6,6)) = 0.491.

Στην ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων συνέβαλε ιδιαίτερα και ο Laplace (1749–1827) αλλά η αξιωματική (μετροθεωρητική) θεμελίωση των πιθανοτήτων οφείλεται στον Ρώσο μαθηματικό Kolmogorov.

Η πρώτη μέθοδος που αναπτύχθηκε για την μέτρηση της πιθανότητας διατυπώθηκε από τον Laplace.

Κλασσικός ορισμός πιθανότητας (Ορισμός Laplace)

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα τύχης, έτσι ώστε **ι)** ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένος **ιι)** τα στοιχειώδη ενδεχόμενα έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν. Έστω N_A ο αριθμός των "ευνοϊκών" περιπτώσεων για το ενδεχόμενο A (πληθικός αριθμός του A) και N ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος (πληθικός αριθμός του Ω). Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A ορίζεται ως εξής:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\text{αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων για το ενδεχόμενο A}}{\text{αριθμός δυνατών περιπτώσεων}}$$

Στη ρίψη ενός ομοιογενούς ζαριού υπάρχουν 6 δυνατά αποτελέσματα και 3 ευνοϊκές περιπτώσεις για το ενδεχόμενο A = { άρτια ένδειξη } = {2, 4, 6 } οπότε P(A) = 3/6 = 1/2.

Οι αριθμοί N_A και N είναι καθορισμένοι εκ των προτέρων (a priori), από τη φύση του πειράματος τύχης, και τα δυνατά αποτελέσματα θεωρούνται ισοπίθανα. Ο κλασσικός ορισμός έχει ικανοποιητική εφαρμογή σε πολλές περιπτώσεις τυχερών παιχνιδιών, όπως η ρίψη ομοιογενούς νομίσματος ή κύβου, η εκλογή χαρτιού από μία δέσμη παιγνιόχαρτων, κ.ά.. Για την εφαρμογή του απαιτείται: **ι)** πλήρης περιγραφή του πειράματος, δηλαδή η απαρίθμηση των δυνατών αποτελεσμάτων και **ιι)** ισοπίθανα αποτελέσματα.

Λόγω αυτών των περιορισμών, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σε τυχαίες διαδικασίες που έχουν μη πεπερασμένο πλήθος αποτελεσμάτων, ή σε διαδικασίες στις οποίες τα δυνατά αποτελέσματα δεν είναι το ίδιο πιθανά, όπως ο υπολογισμός πιθανότητας στη ρίψη μη ομοιογενούς νομίσματος, η πιθανότητα επιβίωσης βρέφους, η πιθανότητα ελαττωματικού προϊόντος κ.λπ.

Η πιθανότητα σαν σχετική συχνότητα

Έστω ότι ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται N φορές και στις N δοκιμές του πειράματος το ενδεχόμενο A εμφανίζεται f φορές. Ο λόγος $\frac{f}{N}$ καλείται σχετική συχνότητα του A.

Παραδείγματος χάριν στην ρίψη ενός αμερόληπτου νομίσματος 100 φορές, αν η όψη “Γράμματα” εμφανισθεί 54 φορές, η σχετική συχνότητα της όψης “Γράμματα” είναι 0.54.

Γενικά ως **σχετική συχνότητα** ενός ενδεχομένου, ορίζεται ο αριθμός των περιπτώσεων στις οποίες το ενδεχόμενο συμβαίνει, διά του συνολικού αριθμού των “δοκιμών” του πειράματος. Σε μία τυχαία διαδικασία, ενώ δεν ισχύει ο νόμος “αίτιο – αποτέλεσμα” των προσδιορίσιμων πειραμάτων, ισχύει ο νόμος της στατιστικής τάξεως ή **νόμος των μεγάλων αριθμών** που αφορά στην κατά μέσον όρο συμπεριφορά σε μακρά σειρά επαναλήψεων της τυχαίας διαδικασίας. Παρατηρήθηκε εμπειρικά, ότι παρά τα μη προβλέψιμα αποτελέσματα των επιμέρους δοκιμών, σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων μίας τυχαίας διαδικασίας, η σχετική συχνότητα με την οποία εμφανίζεται ένα ενδεχόμενο, σταθεροποιείται σταδιακά και προσεγγίζει θετική τιμή μικρότερη της μονάδας, την οποία καλούμε πιθανότητα του ενδεχομένου. Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α, ορίζεται σαν οριακή τιμή της σχετικής συχνότητας, όταν ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνει απεριόριστα (τείνει στο άπειρο).

$$\mathbf{P\,(A\,)} = \underset{N\to\infty}{\textit{οριο}} \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{N}}$$

Η ερμηνεία της πιθανότητας σαν οριακή σχετική συχνότητα, δόθηκε από τον von Mises και βασίζεται στον νόμο της σταθερότητας των σχετικών συχνοτήτων, σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων μίας τυχαίας διαδικασίας. Οι πιθανότητες που υπολογίζονται σύμφωνα με τον εμπειρικό ορισμό, ονομάζονται **στατιστικές πιθανότητες**, ή εκ των υστέρων πιθανότητες (a posteriori probabilities). Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου μπορεί να εκτιμηθεί εμπειρικά από την σχετική συχνότητα εμφάνισης του ενδεχομένου σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

Αν στο σύνολο των ετήσιων γεννήσεων, το 49% είναι κορίτσια, προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε την πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι ίση με 0.49. Αν σε ένα εργοστάσιο, για μεγάλο χρονικό διάστημα, το 1% των παραγόμενων προϊόντων είναι ελαττωματικά, η πιθανότητα ελαττωματικού προϊόντος, μπορεί να εκτιμηθεί κατά προσέγγιση, ίση με 0.01.

Πείραμα Pearson

Σε διαδοχικές ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος καταγράφεται η συχνότητα με την οποία εμφανίζεται η όψη "Γράμματα" και η αντίστοιχη σχετική συχνότητα.

Αριθμός ρίψεων	**Συχνότητα**	**Σχετική συχνότητα**
N	**f**	**f/N**
10	3	0.30
100	56	0.56
200	106	0.53
500	255	0.51
1000	502	0.502
12000	6019	0.501
24000	12012	0.50