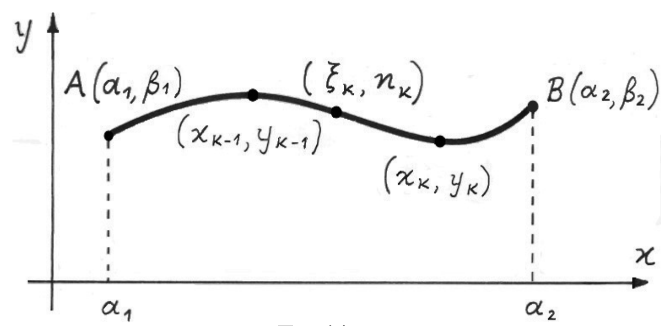
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αποτελούν επέκταση της έννοιας του απλού ολοκληρώματος στην περίπτωση κατά την οποία το πεδίο ολοκλήρωσης είναι το τμήμα μιας επίπεδης ή τρισδιάστατης καμπύλης. Έχουν πολλές εφαρμογές στη Φυσική, σπουδαιότερες των οποίων είναι αυτές που αναφέρονται στο έργο και στο δυναμικό ενός πεδίου δυνάμεων.

6.1 Ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Έστω c μια καμπύλη στο επίπεδο xOy με εξίσωση $y = f(x)$ που συνδέει τα σημεία $A(\alpha_1, \beta_1)$ και $B(\alpha_2, \beta_2)$ (σχήμα 44). Έστω ακόμα δύο μονότιμες συνεχείς συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ που μπορούν να οριστούν για όλα τα σημεία της c (οι συναρτήσεις P και Q παριστάνουν στον R^3 ως γνωστό επιφάνειες).



Σχ. 44

Υποδιαιρούμε τώρα την *c* σε ν τμήματα, εκλέγοντας ν – 1 σημεία πάνω σ' αυτή με συντεταγμένες:

$$(\alpha_1, \beta_1) \equiv (x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), \cdots, (x_\nu, y_\nu) \equiv (\alpha_2, \beta_2).$$

Θέτουμε

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ και } \Delta y_k = y_k - y_{k-1} \quad k = 1, 2, \cdots, \nu$$

και ορίζουμε τα σημεία (ξ_k, η_k) στη *c* έτσι ώστε να βρίσκονται μεταξύ των σημείων

$$(x_{k-1}, y_{k-1}),\ (x_k, y_k).$$

Κατόπιν σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\nu} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right].$$

Το όριο του αθροίσματος αυτού (αν υπάρχει) όταν ν → ∞, έτσι ώστε όλες οι ποσότητες Δx_k και Δy_k $k = 1, 2, \cdots, \nu$ να τείνουν στο μηδέν, λέγεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** των $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ ως προς *x* και *y* κατά μήκος της καμπύλης *c* και συμβολίζεται με

$$\int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ ή } \int_{AB} Pdx + Qdy. \qquad \textbf{(1)}$$

Όπως γίνεται φανερό, *η τιμή του ολοκληρώματος αυτού εξαρτάται γενικά απ' τις συναρτήσεις P και Q, τη συγκεκριμένη καμπύλη c και από τα όρια A και B*.

Εντελώς ανάλογα μπορεί να οριστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας καμπύλης *c* στον τρισδιάστατο χώρο ως

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=1}^{\nu} \left[P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k \right] =$$

$$= \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \textbf{(2)}$$

όπου *P*, *Q*, *R*, είναι συναρτήσεις των *x*, *y*, *z*.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού (γενικός) του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος μιας καμπύλης c στο επίπεδο xOy με εξίσωση $y = f(x)$, είναι ο παρακάτω:

Αν το Δs_k συμβολίζει το μήκος του τόξου της καμπύλης c μεταξύ των σημείων:

(x_{k-1}, y_{k-1}) και (x_k, y_k) τότε το

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{k=1}^{\nu} A\left(\xi_k, \eta_k\right)\Delta s_k = \int_c A(x,y)\,ds \qquad \textbf{(3)}$$

λέγεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $A(x,y)$ ως προς s κατά μήκος της καμπύλης c. Η επέκταση του ορισμού αυτού μπορεί να γίνει για καμπύλη c που αναφέρεται στο χώρο R^3 και με συνάρτηση $A(x,y,z)$ ή ακόμα να γενικευθεί σε χώρο περισσοτέρων διαστάσεων.

Στον R^3 και με συνάρτηση $A(x,y,z)$, ορίζεται ως:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{k=1}^{\nu} A\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right)\Delta s_k = \int_c A(x,y,z)ds\,. \qquad \textbf{(4)}$$

6.2 Υπολογισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Ο υπολογισμός του *επικαμπύλιου* ολοκληρώματος εξαρτάται κυρίως, τόσο απ' τη μορφή του ολοκληρώματος, όσο και απ' τον τρόπο που δίνεται η καμπύλη c. Έτσι:

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Η c δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις

i) Αν η καμπύλη c δίνεται στο επίπεδο με τις παραμετρικές της εξισώσεις

$x = x(t),\ y = y(t)$

τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (1) της 6.1 γίνεται

$$\int_{t_1}^{t_2} P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)dt + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)dt \qquad \textbf{(1)}$$

γιατί $dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt$ ενώ t_1, t_2 εκφράζουν τις τιμές του t που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β.

ii) Παρόμοια εργαζόμαστε αν η καμπύλη c ορίζεται στο χώρο και δίνεται με τις παραμετρικές της εξισώσεις

$$x = x(t),\ \ y = y(t)\ \ z = z(t)\,.$$

Τότε οι συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ γίνονται:

$$P\big(x(t),y(t),z(t)\big),\ Q\big(x(t),y(t),z(t)\big),\ R\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

και επομένως το ολοκλήρωμα (2) της 6.1 γίνεται:

$$\int_{t_1}^{t_2} P\big(t\big)x'(t)dt + Q\big(t\big)y'(t)dt + R\big(t\big)z'(t)dt \qquad \textbf{(2)}$$

ενώ t_1, t_2 εκφράζουν τις τιμές του t που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β.

2ᴴ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Η c δίνεται με την εξίσωση $y = f(x)$ ή $x = \varphi(y)$.

i) Αν η καμπύλη c δίνεται στο επίπεδο ($z = 0$) με την εξίσωση $y = f(x)$, τότε το ολοκλήρωμα (1) της 6.1 υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε το y με $f(x)$ και το dy με $f'(x)dx$ οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(x, f(x))dx + Q(x, f(x))f'(x)dx \qquad \textbf{(3)}$$

όπου α_1, α_2 είναι οι τετμημένες των σημείων Α, Β.

ii) Αν τώρα η c δίνεται στο επίπεδο με την εξίσωση $x = \varphi(y)$, τότε το ολοκλήρωμα (1) της 6.1 παίρνει εντελώς ανάλογα τη μορφή

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} P\big(\varphi(y), y\big)\varphi'(y)\,dy + Q\big(\varphi(y), y\big)\,dy \qquad \textbf{(4)}$$

όπου τώρα β_1, β_2 είναι οι τεταγμένες των σημείων Α, Β.

iii) Στην περίπτωση που η καμπύλη c δίνεται στο χώρο ως τομή δύο επιφανειών

$$f(x,y,z) = 0 \ \text{ και } \ g(x,y,z) = 0\,, \qquad \textbf{(5)}$$

τότε μετασχηματίζουμε τις (5) σε παραμετρικές εξισώσεις της μορφής

$x = x(t), \ \ y = y(t), \ \ z = z(t)$ ως εξής:

Αν $J = \left.\dfrac{D(f,g)}{D(y,z)}\right|_P \neq 0$ σε μια περιοχή του P, όπου $P(x,y,z)$ τυχαίο σημείο που επαληθεύει τις (5), τότε απ' το θεώρημα 2.5.2 πεπλεγμένων συναρτήσεων, οι εξισώσεις (5) μπορούν να λυθούν ως προς y και z συναρτήσει του x, και θεωρώντας το x ως παράμετρο παίρνουμε μια παράσταση της καμπύλης c, της μορφής:

$$x = x, \ \ y = y(x), \ \ z = z(x), \text{ οπότε θέτοντας } x = t, \ \ y = y(t), \ \ z = z(t)$$

έχουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της c, δηλαδή την **1η** περίπτωση **(ii).**

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Η *c* δίνεται με παράμετρο το τόξο *s*

i) Αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι της μορφής (3) της 6.1 όπου η καμπύλη c είναι επίπεδη της μορφής $y = f(x)$, τότε αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται:

$$\int_c A(x,y)\,ds = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} A\big(x, f(x)\big)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx \qquad \textbf{(6)}$$

όπου $\alpha_1, \ \alpha_2$ είναι οι τετμημένες των σημείων Α, Β.

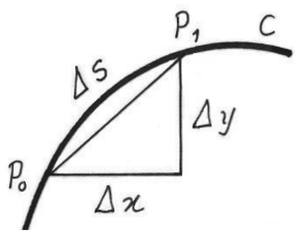
Ενώ, αν η καμπύλη c δίνεται με τη μορφή $x = \varphi(y)$, τότε

$$\int_c A(x,y)ds = \int_{\beta_1}^{\beta_2} A\big(\varphi(y), y\big)\sqrt{1+\left[\varphi'(y)\right]^2}\,dy \qquad \textbf{(7)}$$

όπου τώρα β_1, β_2 είναι οι τεταγμένες των σημείων Α, Β.

Πράγματι, αν Δs είναι ένα στοιχειώδες μήκος πάνω στη c στο xOy, τότε (σχήμα 45):

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$



Σχ. 45

και διαιρώντας με Δx (ή Δy αντίστοιχα) έχουμε

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 \approx 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \text{ ή } \left(\frac{\Delta s}{\Delta y}\right)^2 \approx 1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2.$$

Άρα

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1+y'^2} \text{ οπότε } ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx \ (ds > 0) \quad \text{ή}$$

$$\frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm\sqrt{1+x'^2} \text{ οπότε } ds = \sqrt{1+x'^2}\,dy \ (ds > 0).$$

ii) Αν η εξίσωση της καμπύλης $y = f(x)$ εκφράζεται με τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t),\ y = y(t)$, τότε θα είναι

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt, \text{ όπου } \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} \text{ οπότε}$$

$$\int_c A(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} A\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \qquad \mathbf{(8)}$$

όπου t_1, t_2 είναι οι τιμές που αντιστοιχούν στα σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$.

iii) Τέλος, αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι της μορφής (4) της 6.1, εκφράζοντας την c με παραμετρικές εξισώσεις της μορφής

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \text{ θα έχουμε}$$

$$\int_c A(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} A\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \qquad \mathbf{(9)}$$

4

4Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Η *c* δίνεται με πολικές συντεταγμένες

Στη περίπτωση που η καμπύλη c εκφράζεται στο επίπεδο xOy με πολικές συντεταγμένες, δηλαδή είναι της μορφής

$$\rho = \rho(\theta), \text{ όπου } \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \text{ τότε αποδεικνύεται ότι:}$$

$$\int_{AB} A(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} A\big(\rho\sigma\upsilon\nu\theta, \rho\eta\mu\theta\big)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta, \qquad \mathbf{(10)}$$

όπου $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y = \rho\eta\mu\theta$ και $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta \ \left(\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta}\right).$

6.3 Ιδιότητες επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των συνηθισμένων ολοκληρωμάτων. Π.χ.

1. $\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy$.

2. $\int_{AB} \lambda\, Pdx + \mu\, Q\, dy = \lambda \int_{AB} Pdx + \mu \int_{AB} Qdy$.

3. $\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$,

ενώ αν δίνεται στη γενική του μορφή:

$\int_{AB} A(x,y,z)ds = -\int_{BA} A(x,y,z)ds$.

4. $\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AE} Pdx + Qdy + \int_{EB} Pdx + Qdy$,

όπου Ε ένα άλλο σημείο μεταξύ των Α, Β της *c*.

5. Όπως τονίστηκε στην αρχή, η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\int_{AB} Pdx + Qdy$ δεν εξαρτάται μόνο από τα άκρα Α και Β της καμπύλης, αλλά και από την ίδια την καμπύλη που συνδέει τα σημεία αυτά. Στη περίπτωση όμως, στην οποία η ολοκληρωτέα παράσταση $Pdx + Qdy$ είναι *ολικό διαφορικό* μιας συνάρτησης $f(x,y)$ δηλαδή $df = Pdx + Qdy$, (όπως τη γνωρίσαμε στην παράγραφο 2.5), τότε η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται *μόνο από τα σημεία Α και Β* και όχι από την καμπύλη *c* η οποία συνδέει τα σημεία αυτά.

Πράγματι, τότε είναι προφανώς $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Και αν οι εξισώσεις της καμπύλης είναι $x = x(t)$, $y = y(t)$ και *α, β* είναι οι τιμές της *t* που αντιστοιχούν στα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, τότε η συνάρτηση $f(x,y)$ γίνεται $f\big(x(t), y(t)\big) = F(t)$.

Είναι δε:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} \text{ και } Pdx + Qdy = F'(t)dt = dF \ .$$

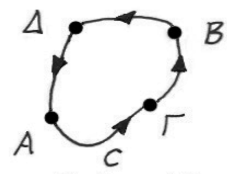
Άρα

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} dF = F(\beta) - F(\alpha) = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

για οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει τα $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

6. Απ' τη σχέση (3) ή (4) της 6.1, αν $A(x, y) = 1$ ή $A(x, y, z) = 1$, τότε το $\int_c ds$ εκφράζει το μήκος της καμπύλης c στο επίπεδο ή στο χώρο αντίστοιχα. Ειδικά αν η καμπύλη είναι κλειστή, τότε το μήκος της L βρίσκεται απ' τον τύπο: $L = \oint_c ds$ όπου το σύμβολο $\oint$ δηλώνει ολοκλήρωμα κατά μήκος κλειστής καμπύλης της οποίας η αρχή Α και το πέρας Β συμπίπτουν και η φορά διαγραφής είναι αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου.

7. Στην περίπτωση που η ολοκληρωτέα παράσταση είναι *ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης*, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε μια *κλειστή καμπύλη ΑΒΑ είναι μηδέν*. Πράγματι, τότε θα είναι (σχήμα 46):



Σχ. 46

$$\int_{\text{ΑΓΒ}} = \int_{\text{ΑΔΒ}} \quad \text{(διότι ως ολικό διαφορικό, δεν εξαρτάται από την } c\text{)}$$

$$\text{ή} \int_{\text{ΑΓΒ}} = -\int_{\text{ΒΔΑ}} \text{ ή } \int_{\text{ΑΓΒ}} + \int_{\text{ΒΔΑ}} = 0, \text{ δηλαδή } \oint_{\text{ΑΓΒΔΑ}} = 0.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Οι παραπάνω ιδιότητες 1 – 5 ισχύουν και για επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ κατά μήκος μιας καμπύλης στο τρισδιάστατο χώρο.

2. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη γενική του μορφή:

$$\int_c A(x, y, z) ds$$

λέγεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της *αριθμητικής* συνάρτησης $A(x, y, z)$ κατά μήκος της καμπύλης c, ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα *1ου είδους*, ενώ στην ειδική του μορφή:

$$\int_c Pdx + Qdy \text{ (στο επίπεδο) ή } \int_c Pdx + Qdy + Rdz \text{ (στο χώρο)}$$

λέγεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της *διανυσματικής* συνάρτησης

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{x}_0 + Q(x,y)\vec{y}_0 \text{ στο επίπεδο ή}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{x}_0 + Q(x,y,z)\vec{y}_0 + R(x,y,z)\vec{z}_0 \text{ στο χώρο}$$

κατά μήκος της καμπύλης c, ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα *2ου είδους*.

3. Μεταξύ επικαμπύλιου ολοκληρώματος 1ου και 2ου είδους υπάρχει συσχέτιση (μετατροπή) που θα αναφερθεί στην επόμενη παράγραφο 6.4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να βρεθεί η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$I = \int_c (y+z)dx + (z+y)dy + (x+y)dz$$

όπου c είναι η έλικα με παραμετρικές εξισώσεις $x = 5\sigma\upsilon\nu\, t$, $y = 5\eta\mu\, t$, $z = t$ (σχήμα 37), για $\alpha = 5$, $\beta = 1$, απ' το σημείο $t = 0$ μέχρι $t = 2\pi$.

Λυση

Είναι $dx = -5\eta\mu\, tdt$, $dy = 5\sigma\upsilon\nu\, tdt$, $dz = dt$. Άρα

$$I = \int_0^{2\pi} \Big[\big(5\eta\mu\, t + t\big)\big(-5\eta\mu\, tdt\big) + \big(t + 5\eta\mu\, t\big)\big(5\sigma\upsilon\nu\, tdt\big) + \big(5\sigma\upsilon\nu\, t + 5\eta\mu\, t\big)dt\Big] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(-25\eta\mu^2 t - 5t\eta\mu\, t + 5t\sigma\upsilon\nu\, t + 25\eta\mu\, t\sigma\upsilon\nu\, t + 5\sigma\upsilon\nu\, t + 5\eta\mu\, t\big)dt =$$

$$= -25\int_0^{2\pi} \eta\mu^2 tdt + 5\int_0^{2\pi} td(\sigma\upsilon\nu\, t) + 5\int_0^{2\pi} td(\eta\mu\, t) +$$

$$+25\int_0^{2\pi} \eta\mu\, td(\eta\mu\, t) + 5\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu\, tdt + 5\int_0^{2\pi} \eta\mu\, tdt =$$

$$= \underbrace{-25\left[-\frac{\eta\mu t\sigma\upsilon\nu\, t}{2}+\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}}_{\mathrm{A}} + \underbrace{5\left[t\sigma\upsilon\nu\, t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\, t dt\right]}_{\mathrm{B}} +$$

$$+\underbrace{5\left[t\eta\mu\, t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\eta\mu\, t dt\right]}_{\Gamma} + \underbrace{25\left[\frac{\eta\mu^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}}_{\Delta} + \underbrace{5\eta\mu\, t\Big|_0^{2\pi}}_{\mathrm{E}} \underbrace{-5\sigma\upsilon\nu\, t\Big|_0^{2\pi}}_{\mathrm{Z}}.$$

Είναι $\mathrm{A}=-25\pi,\ \mathrm{B}=10\pi,\ \Gamma=\Delta=\mathrm{E}=\mathrm{Z}=0$.

Άρα $I=-15\pi$.

2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{AB} 3x^2ydx+5xy^2dy$ κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ από το σημείο Α(1, 1) μέχρι το Β(2, 8).

Λυση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τόξου ΑΒ της καμπύλης είναι

$x=t,\ y=t^3,\ t\in[1,2]$. Άρα $dx=dt,\ dy=3t^2dt$, οπότε

$$\int_{AB} 3x^2ydx+5xy^2dy=\int_1^2(3t^2t^3+5tt^6\cdot 3t^2)dt=$$

$$=\int_1^2(3t^5+15t^9)dt=\left[\frac{t^6}{2}\right]_1^2+\left[\frac{3}{2}t^{10}\right]_1^2=1566.$$

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I=\int_c y^2dx-x^2dy$, όπου c είναι ο κύκλος $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Λυση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου είναι (ακτίνα α = 1) (βλέπε τυπολόγιο στο τέλος του βιβλίου, εξισώσεις κωνικών τομών)

$$x-1=\sigma\upsilon\nu\, t \Rightarrow x=1+\sigma\upsilon\nu\, t \text{ και } y-1=\eta\mu\, t \Rightarrow y=1+\eta\mu\, t ,\ t\in[0,2\pi].$$