Κεφάλαιο

3

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

3.1 Γενικά

Τις τελευταίες δεκαετίες ένας μεγάλος αριθμός μεθόδων βελτιστοποίησης έχει αναπτυχθεί με βάση τη θεωρία του μαθηματικού λογισμού. Οι διάφοροι μαθηματικοί αλγόριθμοι εφαρμόζονται υπό συγκεκριμένες συνθήκες και προϋποθέσεις και μπορούν να επιλύσουν μόνο προβλήματα τα οποία πληρούν τις προϋποθέσεις αυτές. Τέτοιες περιπτώσεις μαθηματικών αλγορίθμων είναι οι αλγόριθμοι Γραμμικού Προγραμματισμού (Γ.Π.), Δυναμικού Προγραμματισμού (Δ.Π.), Ακέραιου Προγραμματισμού (Ακ.Π.) και Μη Γραμμικού Προγραμματισμού (Μη Γ.Π.). Η θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι δυνατόν να εφαρμοστεί μόνο στις περιπτώσεις όπου οι μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι γραμμικές. Η εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού σε προβλήματα διαχείρισης και σχεδιασμού περιβαλλοντικών συστημάτων δεν είναι πάντοτε εφικτή λόγω της μη γραμμικότητας που διέπει τις μεταβλητές και τη φύση των συστημάτων.

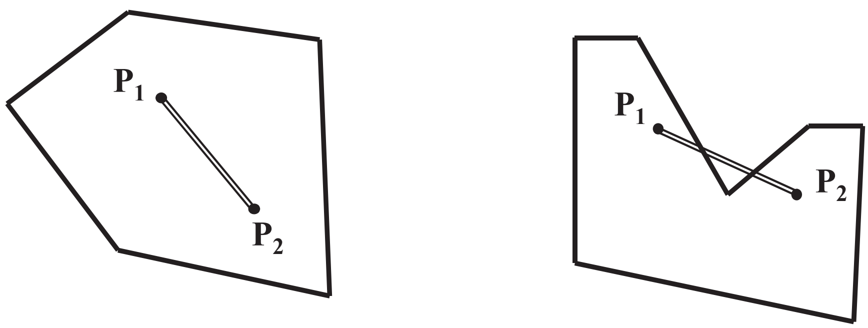
Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης Γραμμικού Προγραμματισμού πρωτοεμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1930 με σκοπό τη βέλτιστη κατανομή οικονομικών πόρων. Πρωτοπόροι στην εφαρμογή διαχειριστικών μοντέλων Γραμμικού Προγραμματισμού ήταν οι εταιρείες πετρελαιοειδών οι οποίες, έχοντας ως στόχο το μέγιστο δυνατό κέρδος, ανέπτυξαν ποικίλα διαχειριστικά μοντέλα τα οποία υπολόγιζαν τη βέλτιστη κατανομή των διαφόρων παραγώγων του αργού πετρελαίου λαμβάνοντας υπόψη περιορισμούς στην ποιότητα και στην ποσότητα, ανάλογα με την περίπτωση. Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού καταγράφονται κυρίως στους τομείς της βιομηχανικής παραγωγής προϊόντων, των κατασκευών και γενικότερα σε τομείς όπου είναι αναγκαίος ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων με την ευρύτερη έννοια κατά τέτοιον τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται κάθε φορά ο στόχος με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναλυτική παρουσίαση των βασικών αρχών που διέπουν τους αλγόριθμους Γραμμικού Προγραμματισμού, των μεθόδων επίλυσης περιβαλλοντικών προβλημάτων με τους αλγορίθμους αυτούς, καθώς και συγκεκριμένων περιβαλλοντικών εφαρμογών των οποίων ο σχεδιασμός, η διαχείριση και η επίλυση μπορεί να γίνουν με χρήση μεθόδων Γραμμικού Προγραμματισμού. Αρκετά μοντέλα διαχείρισης και σχεδιασμού περιβαλλοντικών συστημάτων, όπως τα ατμοσφαιρικά μοντέλα ποιότητας, τα μοντέλα σχεδιασμού δικτύων ύδρευσης και αποχέτευσης, καθώς και μοντέλα διαχείρισης στερεών αποβλήτων βασίζονται στη θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού.

3.1.1 Ορολογία

Η θεωρία επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού βασίζεται σε θεωρήματα και αξιώματα του μαθηματικού λογισμού. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν οι βασικές μαθηματικές αρχές και η ορολογία που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού.

- Ο προσδιορισμός ενός σημείου $\mathbf{x}$ το οποίο ανήκει σε n-διάστατο διανυσματικό χώρο γίνεται από ένα διάνυσμα n ανεξάρτητων μεταβλητών $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- **Κυρτός χώρος** (**Convex set/domain**): Τα σημεία $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_k$ ενός συνόλου σχηματίζουν κυρτό χώρο όταν, για κάθε ζεύγος $(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j)$ με $i \neq j$, το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει ανήκει εξ ολοκλήρου στο σύνολο.



(A) (B)

Σχήμα 3.1: *Παραδείγματα κυρτού (A) και μη κυρτού (B) χώρου*

- **Ευθύγραμμο τμήμα** (**segment**): Εάν οι συντεταγμένες δύο σημείων P_1 και P_2 δίνονται από τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ αντίστοιχα, τότε οι συντεταγμένες $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ κάθε σημείου P που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ δίνονται από τη σχέση:

$$z_i = \lambda x_i + (1-\lambda) y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{όπου} \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{3.1}$$

- **Κορυφή** (**vertex** ή **extreme point**) καλείται το σημείο του χώρου το οποίο δεν κείται στο τμήμα που ενώνει δύο άλλα σημεία του συνόλου. Στην περίπτωση χώρου n διαστάσεων είναι το σημείο τομής n περιορισμών.
- **Εφικτή λύση** (**feasible solution**) ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού καλείται κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ το οποίο ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς συμπεριλαμβανομένων και των περιορισμών μη αρνητικότητας. Στην περίπτωση όπου έστω και ένας εκ των περιορισμών δεν ικανοποιείται, τότε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ αποτελεί **μη εφικτή** (**non-feasible**) **λύση** του προβλήματος.
- **Επαυξημένη λύση** (**augmented solution**) καλείται η λύση ισοδύναμου προβλήματος ανισότητας $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το οποίο έχει επαυξηθεί με μεταβλητές απόκλισης (χαλαρές μεταβλητές) $(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ ώστε να προκύπτει πρόβλημα ισότητας $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$.
- **Βασική λύση** (**basic solution**) ονομάζεται κάθε ακραία επαυξημένη λύση. Κάθε βασική λύση μπορεί να είναι εφικτή ή μη.
- **Βασική εφικτή λύση καλείται** η βασική λύση της οποίας m βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Μία βασική λύση θεωρείται εκφυλισμένη (degenerated) αν κάποιες από τις m βασικές μεταβλητές έχουν μηδενική τιμή.
- **Εφικτή λύση ακραίου σημείου** (**corner-point feasible solution**) **καλείται** κάθε εφικτή λύση που δεν κείται σε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο άλλες δυνατές λύσεις, δηλαδή κάθε λύση που βρίσκεται σε κορυφή ή γωνία της εφικτής περιοχής.
- **Γειτονικά ακραίες εφικτές λύσεις** (**adjacent corner-point feasible solutions**) καλούνται δύο ακραίες εφικτές λύσεις εφόσον η ευθεία που τις ενώνει αποτελεί εξίσωση ορίου για την εφικτή περιοχή.
- **Υπερεπίπεδο** (**Hyperplane**) H καλείται το σύνολο των σημείων του n-διάστατου διανυσματικού χώρου των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη γραμμική εξίσωση της μορφής:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b \tag{3.2}$$

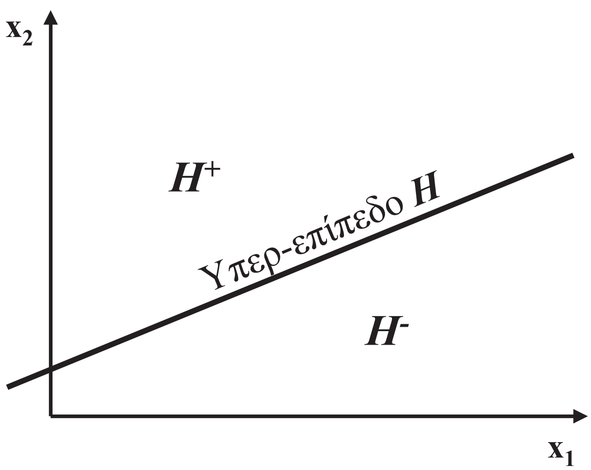
Κάθε υπερεπίπεδο H χωρίζει τον διανυσματικό χώρο σε δύο υποχώρους (**half-spaces**) H^+ και H^-, για καθέναν από τους οποίους ισχύει:

$$H^+ = \{\mathbf{x} : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \geq b\} \tag{3.3α}$$

και

$$H^- = \{\mathbf{x} : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b\} \tag{3.3β}$$

Στην περίπτωση 2-διάστατου χώρου το υπερεπίπεδο H εκφυλίζεται σε ευθεία γραμμή. Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία ικανοποιούν την ισότητα (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: *Σχηματική παρουσίαση υπερεπιπέδου H σε 2-διάστατο χώρο*

3.1.2 Κανονική Μορφή Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Η τυπική μορφή ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{min}\ (\text{ή}\ \mathbf{max})\, f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{3.4α}$$

με περιορισμούς

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq, \quad =, \quad \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq, \quad =, \quad \geq b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq, \quad =, \quad \geq b_m \end{array}\right\} \rightarrow m \text{ περιορισμοί} \tag{3.4β}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \qquad \rightarrow n \text{ περιορισμοί}$$

Οι εξισώσεις (3.4α) και (3.4β) μπορούν να εκφραστούν και με τη μορφή πινάκων ως:

$$\mathbf{min}\ (\text{ή}\ \mathbf{max})\, f\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \tag{3.4γ}$$

με περιορισμούς

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.4δ}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Η σχέση (3.4α) αντιπροσωπεύει την αντικειμενική συνάρτηση (**objective function**) του προβλήματος και οι σχέσεις (3.4β) αποτελούν τους περιορισμούς (**constraints**) του προβλήματος. Οι περιορισμοί χωρίζονται σε m λειτουργικούς (**functional**) περιορισμούς και n περιορισμούς μη αρνητικότητας (**non-negativity**). Η κανονική μορφή του παραπάνω προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού προκύπτει εάν οι περιορισμοί ανισότητας μετατραπούν σε περιορισμούς ισότητας με την προσθήκη χαλαρών μεταβλητών (**slack variables**) S_j.

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + S_1 & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + S_2 & & = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + & \cdots & + S_m & = b_m \end{array} \tag{3.5}$$