Κεφάλαιο 8

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Στα προηγούμενα κεφάλαια συζητήσαμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης και να πραγματοποιήσουμε ελέγχους υποθέσεων για τις διαφορές ανάμεσα σε δύο πληθυσμιακούς μέσους. Όμως υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες ο πειραματικός σχεδιασμός πρέπει να επεκταθεί σε μια σύγκριση περισσότερων από δύο πληθυσμιακών μέσων. Για παράδειγμα, μπορεί να μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε την υπόθεση ότι ο μέσος όρος αναμονής για ιατρικές εξετάσεις είναι ο ίδιος σε μια σειρά νοσοκομεία. Εδώ μια κατάλληλη μηδενική υπόθεση μπορεί να είναι ότι όλοι οι πληθυσμιακοί μέσοι είναι ίσοι.

Αυτό που μπορούμε να κάνουμε για να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση είναι να συγκρίνουμε κάθε ζεύγος πληθυσμών για διαφορές στους μέσους τους. Δηλαδή να συγκρίνουμε το μέσο χρόνο αναμονής στο πρώτο νοσοκομείο με αυτόν του δεύτερου, του πρώτου με αυτόν του τρίτου, και ομοίως για τα υπόλοιπα. Στην πραγματικότητα, αν θεωρήσουμε μια σειρά από τεστ υποθέσεων για σύγκριση πληθυσμιακών μέσων ανά ζεύγος, τότε κάτω από την παραδοχή ότι η μηδενική υπόθεση είναι σωστή (δηλαδή ότι όλοι οι πληθυσμιακοί μέσοι είναι ίσοι), βρίσκουμε ότι όσο περισσότερο επαναλαμβάνουμε το ίδιο τεστ σύγκρισης ανά δύο πληθυσμιακούς μέσους, το πιο πιθανό είναι να υπάρχει τουλάχιστον μια απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης (με κάποια πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου Ι).

Η σωστή διαδικασία για ένα κοινό τεστ για την ισότητα μεταξύ περισσότερων από δύο μέσων, κρατώντας το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας σταθερό, είναι η ανάλυση διακύμανσης (ή ανάλυση διασποράς) κατά ένα παράγοντα (one-way analysis of variance ή ANOVA για συντομία)[1].

[1] Μπορούμε επίσης να έχουμε ανάλυση διακύμανσης με δύο παράγοντες, με ή χωρίς αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Η ανάλυση στο βιβλίο αυτό θα γίνει με αναφορά μόνο σε ένα παράγοντα.

8.1 Η σημασία της ανάλυσης διακύμανσης

Η ANOVA χρησιμοποιείται για να ελέγξουμε την ισότητα μεταξύ k πληθυσμιακών μέσων $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ (για k>2). Η περίπτωση ελέγχου των μέσων k πληθυσμών παίρνει τη μορφή:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$$

$$H_1: \text{όχι όλοι οι πληθυσμιακοί μέσοι ίσοι } (\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \ldots \neq \mu_k)$$

Αν η μηδενική υπόθεση είναι σωστή, τότε η πιθανότητα να την απορρίψουμε είναι ισοδύναμη με την πιθανότητα ότι τουλάχιστον σε ένα ζεύγος από τους k πληθυσμούς να μην έχουμε ίσους μέσους. Αν, για παράδειγμα θεωρήσουμε την περίπτωση της σύγκρισης τεσσάρων πληθυσμών, τότε υπάρχουν έξι πιθανές συγκρίσεις ζευγών (1ος πληθυσμός με 2ο, 1ος με 3ο, 1ος με 4ο, 2ος με 3ο, 2ος με 4ο και 3ος με 4ο) και αν ένα σφάλμα τύπου Ι για επίπεδο σημαντικότητας 5% καθορίζεται για κάθε σύγκριση, τότε η ολική πιθανότητα μπορεί να πολλαπλασιαστεί ως μία διωνυμική πιθανότητα του να καταγράψουμε μία ή περισσότερες «επιτυχίες» (απορρίψεις), όπου η πιθανότητα κάθε επιτυχίας (απόρριψη) είναι 5%. Ένας απλός πολλαπλασιασμός θα αποκαλύψει ότι η πιθανότητα είναι 0,265. Με αλλά λόγια, αν κάποιος χρησιμοποιήσει συγκρίσεις ζευγών, η πιθανότητα να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση όταν αυτή είναι σωστή (η πιθανότητα να υποπέσουμε σε σφάλμα τύπου Ι) είναι 26,5%.

Το τεστ θα βασίζεται σε μια σειρά από τυχαία δείγματα μεγέθους $n_1, n_2, \ldots, n_k$ επιλεγμένα από κάθε πληθυσμό. Αν κάθε τυχαία παρατήρηση X_{ij} αναφέρεται στην i παρατήρηση για το δείγμα που προέκυψε από τον j πληθυσμό, τότε οι συλλεχθείσες παρατηρήσεις από κάθε πληθυσμό θα είναι:

Πληθυσμός 1: $X_{11}, X_{21}, \ldots, Xn_{1\,1}$

Πληθυσμός 2: $X_{12}, X_{22}, \ldots, Xn_{2\,2}$

……..……………………………………

Πληθυσμός k: $X_{1k}, X_{2k}, \ldots, X_{nk}$

Η ανάλυση διακύμανσης ενός παράγοντα[2] υποθέτει ότι οι υπό εξέταση **πληθυσμοί** είναι όλοι **κανονικά κατανεμημένοι**, οι **παρατηρήσεις** για κάθε πληθυσμό είναι **ανεξάρτητες** και ότι οι **διακυμάνσεις** κάθε πληθυσμού είναι **ίσες**.

[2] Αν X_{ij} είναι η i παρατήρηση στον j πληθυσμό, τότε το υπόδειγμα της ανάλυσης διακύμανσης κατά ένα παράγοντα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$X_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij}$$

Όπου ε_{ij} είναι τα τυχαία σφάλματα που κατανέμονται κανονικά με μέσο 0 και διακύμανση σ^2, ενώ το d_j εκφράζει τη διαφοροποίηση του πληθυσμιακού μέσου j από το γενικό μέσο. Υποθέτουμε ότι οι k πληθυσμοί κατανέμονται κανονικά με μέσο μ και ίση διακύμανση σ^2. Η H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_k$ μπορεί να διατυπωθεί και ως H_0: $d_1=d_2=d_3=\ldots=d_k$.

Έστω ότι κάθε πληθυσμός έχει μέσο μ_j και διακύμανση σ^2 (η οποία, από τις υποθέσεις, είναι κοινή μεταξύ των πληθυσμών). Κάθε πληθυσμός είναι κανονικά κατανεμημένος με ανεξάρτητες παρατηρήσεις, έτσι ώστε μια τυχαία παρατήρηση X_{ij} από τον j πληθυσμό να έχει την παρακάτω κατανομή:

$$X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2) \tag{8.1}$$

Η δειγματική διακύμανση για κάθε δειγματικό μέσο $\overline{X}_j$ θα κατανέμεται κανονικά ως:

$$\overline{X}_j \sim N\left(\mu_j, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) \tag{8.2}$$

όπου $\overline{X}_j$ είναι ο μέσος δείγματος εξαγόμενου από τον j πληθυσμό. Τέλος, και μόνο κάτω από τη μηδενική υπόθεση, ο μέσος των μέσων ή γενικός μέσος (grand mean) $\overline{\overline{X}}$ θα κατανέμεται σύμφωνα με την ακόλουθη κανονική κατανομή:

$$\overline{\overline{X}} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{k} n_j}\right) \tag{8.3}$$

Η ουσία ενός τεστ AVOVA βασίζεται στην ανάλυση της συνολικής μεταβλητότητας των δεδομένων. Ένα μέτρο σύγκρισης για τη συνολική μεταβλητότητα στα k δείγματα είναι το συνολικό άθροισμα τετραγώνων (Total Sum of Squares, TSS) το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$TSS = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{\overline{X}})^2 \tag{8.4}$$

Η ANOVA στηρίζεται στη σύγκριση της μεταβλητότητας μεταξύ των δειγματικών μέσων και της μεταβλητότητας των τιμών μέσα σε κάθε δείγμα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο πιθανές επεξηγήσεις για κάθε παρατηρημένη μεταβλητότητα στα δεδομένα:

1. **Η διακύμανση μεταξύ των δειγμάτων**: που περιγράφει τη συστηματική διακύμανση κατά μήκος των δειγμάτων που έχει προκληθεί από διαφορές στους ίδιους τους πληθυσμιακούς μέσους.
2. **Η διακύμανση μέσα στα δείγματα**: η οποία περιγράφει τις τυχαίες διακυμάνσεις κάθε δείγματος δεδομένων γύρω από κάθε πληθυσμιακό μέσο.

Για να αναλύσουμε τη σχετική σημαντικότητα αυτών των δυο πηγών μεταβλητότητας, μπορούμε να διασπάσουμε τη συνολική μεταβλητότητα στα δεδομένα (TSS), σε αυτήν που οφείλεται καθαρά στην τυχαία μεταβλητότητα εντός των δειγμάτων, και αυτή που περιλαμβάνει κάποια συστηματική μεταβλητότητα μεταξύ των δειγμάτων. Η ανάλυση μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{\overline{X}})^2=\sum_{j=1}^{k}n_j(\overline{X}_j-\overline{\overline{X}})^2+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2 \qquad (8.5)$$

Για να δώσουμε κάποια διαίσθηση στην ανάλυση, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση ως εξής:

$$\text{TSS} = \text{SSA} + \text{SSE} \qquad (8.6)$$

όπου ο πρώτος όρος SSA συμβολίζει την άθροιση τετραγώνων των αποκλίσεων των δειγματικών μέσων του παράγοντα A από το γενικό μέσο (Sum of Squares of Sample Averages) και ο δεύτερος όρος SSE παριστάνει το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων (Error Sum of Squares, SSE). Ο όρος SSA είναι απλός στην επεξήγησή του, αφού παριστάνει τη μεταβλητότητα των διαφορών που έχουν μεταξύ τους τα δείγματα. Ο όρος SSE μετρά τη συνολική μεταβλητότητα εντός των δειγμάτων. Ειδικότερα,

$$\text{SSA} = \sum_{j=1}^{k}n_j(\overline{X}_j-\overline{\overline{X}})^2 \qquad (8.7)$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2 \qquad (8.8)$$

Όπως βλέπουμε, ο όρος SSE είναι ένα μέτρο της μεταβλητότητας των τυχαίων παρατηρήσεων σε κάθε δείγμα γύρω από τους αντίστοιχους μέσους. Έτσι, το SSE μετρά τη διακύμανση στα k δείγματα ως σύνολο. Αν εξετάσουμε τη δομή του πρώτου όρου SSA, βλέπουμε ότι μετράει τη διακύμανση στους πληθυσμιακούς μέσους γύρω από το γενικό μέσο, σταθμισμένο από το μέγεθος του κάθε δείγματος. Με άλλα λόγια, το SSA μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δειγματικό στατιστικό μέγεθος για να εκτιμήσει τη διακύμανση μεταξύ των k πληθυσμιακών μέσων. Αν όλοι οι πληθυσμιακοί μέσοι είναι ίσοι, τότε ο όρος SSA παρουσιάζει κάποια μεταβλητότητα στα δεδομένα, που οφείλεται μόνο σε τυχαία διακύμανση (και συμπερασματικά θα είναι της ίδιας τάξης με την SSE). Αν, από την άλλη πλευρά, οι πληθυσμιακοί μέσοι είναι διαφορετικοί, τότε οι διαφορές στην SSA θα είναι μεγαλύτερες.

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής (H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_k$), τότε δεν θα πρέπει να υπάρχει συστηματική διακύμανση μεταξύ των k δειγματικών μέσων. Με άλλα λόγια, SSA και SSE θα πρέπει να είναι της ίδιας τάξης. Υπό μία έννοια, χρειάζεται να συγκρίνουμε τη σημαντικότητα της διακύμανσης εντός και μεταξύ των ομάδων. Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιούμε τη στατιστική F που σχηματίζεται από το λόγο των ως χ^2 κατανεμημένων στατιστικών SSA και SSE. Επειδή μας ενδιαφέρει η μέση μεταβολή, δημιουργούμε το μέσο άθροισμα τετραγώνων των μέσων των δειγμάτων (Mean Squares of Averages, MSA), το οποίο βρίσκεται από τη διαίρεση της άθροισης τετραγώνων των αποκλίσεων των δειγματικών μέσων προς τους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή MSA=SSA/(k-1). Ομοίως, για τον όρο SSE παίρνουμε το μέσο άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων (Mean Square Error, MSE), όπου MSE=SSE/$\Sigma(n_j$-1). Η στατιστική F της ανάλυσης της διακύμανσης προκύπτει από το λόγο του MSA προς το MSE.

Αυτό σημαίνει, διατηρώντας τη μηδενική υπόθεση ως αληθή, μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω:

$$F = \frac{SSA/(k-1)}{SSE/\sum(n_j-1)} = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{k-1,N-k,a} \qquad (8.9)$$

Παρατηρούμε ότι $\Sigma(n_j - 1)$=N-k, όπου N ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων και k ο αριθμός των δειγμάτων. Αν η αρχική υπόθεση είναι σωστή, τότε (επειδή οι προσδοκίες για τον αριθμητή και τον παρανομαστή είναι 1) η στατιστική F θα έπρεπε να κυμαίνετε γύρω στο 1. Μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, αν η τιμή της στατιστικής F υπερβαίνει μία κριτική τιμή από την F κατανομή σύμφωνα με ένα δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας (έστω 5%).

8.2 Ένα παράδειγμα της ANOVA κατά ένα παράγοντα

Η ANOVA χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι οι μέσοι των πληθυσμών, οι οποίοι κατανέμονται κανονικά και με όμοια διακύμανση, είναι ίσοι ή άνισοι. Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, και δεν υπάρχει καμία διαφορά στους μέσους μεταξύ των k πληθυσμών, τότε όλες οι διακυμάνσεις στα δεδομένα μπορούν να χαρακτηριστούν καθαρά σε όρους μεταβλητότητας μέσα σε κάθε δείγμα. Αν, από την άλλη, οι πληθυσμιακοί μέσοι διαφέρουν, τότε θα υπάρχει κάποια επιπρόσθετη συστηματική μεταβλητότητα στα δείγματα μεταξύ των ομάδων. Αν παρουσιάζεται κάποια μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων, τότε μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε δείγμα έχει εξαχθεί από *διαφορετική κατανομή* (η οποία, με δεδομένη την υπόθεση ότι οι πληθυσμοί έχουν ίσες διακυμάνσεις, υποθέτει διαφορετικούς μέσους για κάθε πληθυσμό).

Σύμφωνα με τη διαδικασία της ANOVA, πρώτα βρίσκουμε την πληθυσμιακή διακύμανση από τη διακύμανση μεταξύ των δειγματικών μέσων (Ι), στη συνέχεια βρίσκουμε την πληθυσμιακή διακύμανση από τη διακύμανση του κάθε δείγματος (ΙΙ), και στο τέλος υπολογίζουμε το λόγο F από τη διαίρεση των δύο αυτών διακυμάνσεων (F= I/II).

Αν η υπολογισμένη τιμή του λόγου F είναι υψηλότερη από την κριτική τιμή της κατανομής F από τον αντίστοιχο πίνακα, τότε η υπόθεση H_0 απορρίπτεται, γεγονός που σημαίνει ότι οι μέσοι δεν είναι ίσοι. Οι βαθμοί ελευθερίας για τον αριθμητή δίδονται από τον αριθμό των δειγμάτων αφαιρώντας 1 και οι βαθμοί ελευθερίας για τον παρανομαστή από το πλήθος των παρατηρήσεων όλων των δειγμάτων ($N=n_1+n_2+\ldots+n_k$) αφαιρώντας τον αριθμό των δειγμάτων (k). Δηλαδή, οι βαθμοί ελευθερίας του παρονομαστή δίνονται ως N-k. Ας μελετήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.1

Υποθέτουμε ότι έχουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις από τρία δείγματα ίσου μεγέθους ($n_1=n_2=n_3=10$).

		Άθροισμα
Δείγμα 1ο	2, 7, 17, 27, 32, 37, 47, 57, 67, 77	370
Δείγμα 2ο	7, 12, 22, 27, 27, 37, 42, 52, 57, 67	350
Δείγμα 3ο	2, 7, 12, 27, 37, 47, 57, 62, 72, 87	410

Αρχικά βρίσκουμε το μέσο κάθε δείγματος και αμέσως μετά το μέσο των μέσων. Δηλαδή:

$$\bar{X}_1 = \frac{370}{10} = 37 \qquad \bar{X}_2 = \frac{350}{10} = 35 \qquad \bar{X}_3 = \frac{410}{10} = 41$$

και
$$\bar{\bar{X}} = \frac{370+350+410}{10x3} = \frac{1.130}{30} = 37{,}7$$

Κατόπιν, σχηματίζουμε τις υποθέσεις ελέγχου. Ελέγχουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1\text{: } \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$$

Κατά το πρώτο βήμα υπολογίζεται η άθροιση τετραγώνων των αποκλίσεων των δειγματικών μέσων από το γενικό μέσο, ως εξής:

$$SSA = 10[(37-37{,}7)^2+(35-37{,}7)^2+(41-37{,}7)^2] = 10(0{,}49+7{,}29+10{,}89) = 186{,}7$$

Για να βρούμε τη μέση άθροιση διαιρούμε το SSA με τον αριθμό των δειγμάτων μείον 1 και έχουμε:[3]

$$MSA = SSA/(3\text{-}1) = 186{,}7/2 = 93{,}35$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου βήματος (ΙΙ) πρέπει να εκτιμήσουμε τη διακύμανση μέσα σε κάθε δείγμα. Καθώς το πρώτο δείγμα λαμβάνει τις τιμές:

2, 7, 17, 27, 32, 37, 47, 57, 67, 77

τότε θα έχουμε

$$II_1=(2-37)^2+(7-37)^2+(17-37)^2+(27-37)^2+(32-37)^2+(37-37)^2+(47-37)^2+ +(57-37)^2+(67-37)^2+(77-37)^2 = 5.650$$

Το ίδιο πρέπει να κάνουμε για το κάθε ένα από τα υπόλοιπα 2 δείγματα βρίσκοντας τα II_2 και II_3. Δηλαδή

$$II_2=[(7-35)^2+(12-35)^2+(22-35)^2+(27-35)^2+(27-35)^2+(37-35)^2+(42-35)^2+ +(52-35)^2+(57-35)^2+(67-35)^2]=3.460$$

$$II_3=[(2-41)^2+(7-41)^2+(12-41)^2+(27-41)^2+(37-41)^2+(47-41)^2+(57-41)^2+ +(62-41)^2+(72-41)^2+(87-41)^2]=7.540$$

Η άθροιση των τριών αυτών συνολικών αριθμών μας δίνει το SSE=16.650. Όπως και στο πρώτο βήμα, για να βρούμε τη μέση τιμή της διακύμανσης στα τρία δείγματα διαιρούμε το SSE με το συνολικό αριθμό των παρατηρήσεων ($N=n_1+n_2+n_3$) μείον τον αριθμό των δειγμάτων. Δηλαδή:

$$MSE=SSE/N-k= 16.650/(30-3) = 616{,}67$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του MSE είναι αυτός κατά τον οποίο πρώτα βρίσκουμε τις δειγματικές διακυμάνσεις. Δηλαδή:

$$s_1^2 =[(2-37)^2+(7-37)^2+(17-37)^2+(27-37)^2+(32-37)^2+(37-37)^2+(47-37)^2+ +(57-37)^2+(67-37)^2+(77-37)^2]/(10-1) = 5.650/9=627{,}8$$

[3] Σε πολλά βιβλία, ένας εναλλακτικός τρόπος συμβολισμού του MSA είναι MSTr, από τη λέξη treatments.

Κεφάλαιο 11

ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ

Είδαμε ότι με την Ανάλυση Παλινδρόμησης (απλής και πολλαπλής) αποσκοπούμε να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής βάσει της συμπεριφοράς μιας ή περισσότερων ερμηνευτικών μεταβλητών, ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε την εξαρτημένη μεταβλητή. Σκοπός μας είναι η εκτιμημένη συναρτησιακή σχέση να μας δώσει αξιόπιστες προβλέψεις για τη μεταβλητή ενδιαφέροντος.

Στην προσπάθεια αυτή η ύπαρξη κάποιας γραμμικής σχέσης μεταξύ των ερμηνευτικών μεταβλητών και της εξαρτημένης είναι απαραίτητη. Πώς μπορούμε όμως να αντιμετωπίσουμε περιπτώσεις, όπου η συμπεριφορά κάποιας μεταβλητής επηρεάζεται από κάποια άλλη μεταβλητή για την οποία είτε δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποια ακριβή συναρτησιακή σχέση είτε δεν έχουμε μετρήσεις ή ο αριθμός των μετρήσεων είναι μικρός;

Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να εξετάσουμε τη μεταβλητή ενδιαφέροντος σε ατομικό επίπεδο στηριζόμενοι στις καταγεγραμμένες μετρήσεις της διαχρονικά. Η διαχρονική εξέλιξη μιας μεταβλητής αποτελεί μία **χρονολογική σειρά (ΧΣ)** με τα δεδομένα χρονολογικών σειρών (Time Series Data) να ερμηνεύουν τη μεταβολή της μεταβλητής στο χρόνο. Οι μετρήσεις αυτές αναφέρονται σε διάφορα σημεία μέσα στο χρόνο (έτη, τρίμηνα, μήνες, ημέρες κ.λπ.). Οι κύριες συνιστώσες μιας χρονολογικής σειράς είναι:

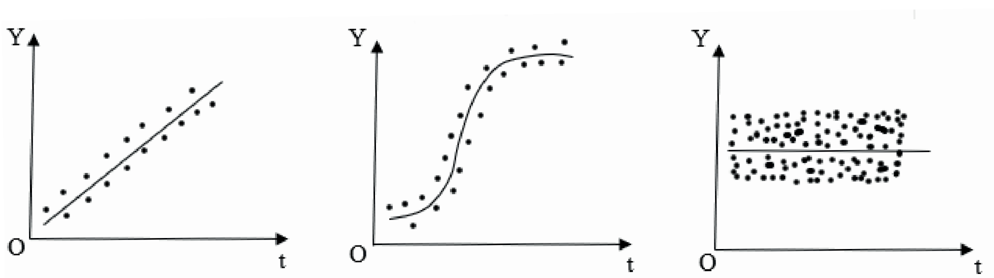
1. Η **τάση** (Trend): όταν τα δεδομένα παρουσιάζουν μακροχρόνια μεταβολή (αύξηση ή μείωση). Οι πωλήσεις πολλών εμπορευμάτων, το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν και πολλοί άλλοι οικονομικοί, εμπορικοί και χρηματιστηριακοί δείκτες ακολουθούν κάποια τάση στις κινήσεις τους διαχρονικά.

2. Η **εποχικότητα** (Seasonality): δηλαδή η περιοδική μεταβολή, η οποία επαναλαμβάνεται σε κάποια συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα (π.χ. η ζήτηση για παγωτά τους καλοκαιρινούς μήνες).
3. Οι **κυκλικές μεταβολές** ή **κυκλικές διακυμάνσεις** (cycles): οι οποίες διαφέρουν από τις περιοδικές, γιατί είναι διάρκειας μεγαλύτερης του ενός έτους και δεν παρουσιάζουν κανονική περιοδικότητα.
4. Οι **τυχαίες** (ακανόνιστες) **μεταβολές**: διακρίνονται σε συμπτωματικές (απρόβλεπτα γεγονότα όπως σεισμοί, απεργίες, κ.λπ.) και σε τυχαίες μεταβολές (π.χ. τύχη).

Η γραφική παράσταση μιας χρονολογικής σειράς είναι η οπτική επαφή με τις μετρήσεις της μεταβλητής στο χρόνο και βοηθά τόσο στον εντοπισμό της τάσης ή και της πιθανής εποχικότητας ή ακόμη και κάποιας απροσδιόριστης κυκλικότητας. Η μακροχρόνια μεταβολή (αύξηση ή μείωση) στα δεδομένα προσδιορίζει την ύπαρξη τάσης και εντοπίζεται ευκολότερα, σε σχέση με τις υπόλοιπες συνιστώσες, με τη γραφική παράσταση της μεταβλητής στο χρόνο.

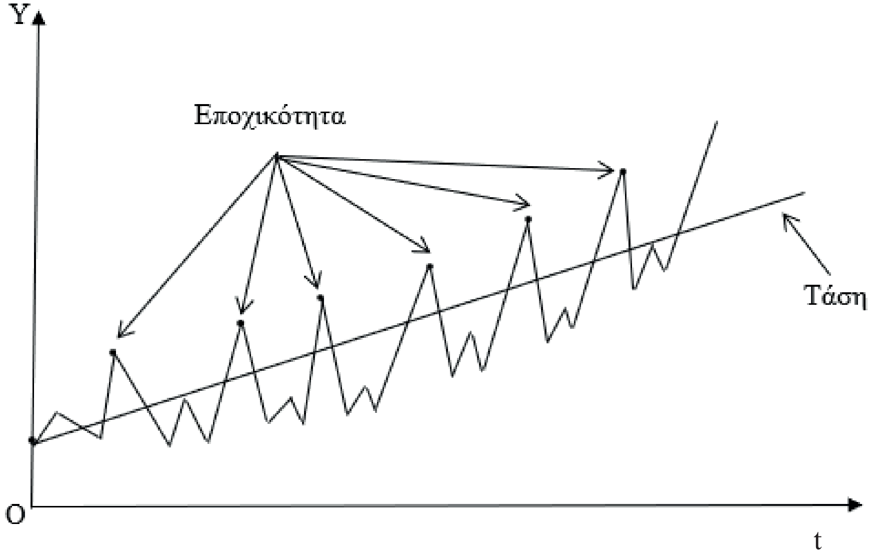
Τα παρακάτω Σχήματα παρουσιάζουν γραφικά τις συνιστώσες αυτές. Το Σχήμα 11.1 αναφέρεται στη γραμμική τάση (α), στη μη-γραμμική τάση (β) και σε έλλειψη τάσης (γ). Ομοίως, το Σχήμα 11.2 παρουσιάζει την περίπτωση τάσης και εποχικότητας σε ανάλυση τριμηνιαίων στοιχείων με το 4ο εξάμηνο να εμφανίζει μία σχετική αύξηση στις τιμές της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Είναι εμφανές ότι εκτός της εποχιικότητας έχουμε και έντονη γραμμική ανοδική τάση.

Ομοίως, το Σχήμα 11.3 παρουσιάζει την περίπτωση της κυκλικότητας και των πιθανών οικονομικών κύκλων (business cycles). Η βασική διαφορά ανάμεσα στην εποχικότητα και την κυκλική μορφή είναι ότι η εποχική έχει σταθερή έκταση και επαναλαμβάνεται σε τακτική περιοδική βάση, ενώ η κυκλική έχει διαφορετική απροσδιόριστη έκταση. Επίσης η μέση έκταση ενός κύκλου είναι μεγαλύτερη από αυτή της εποχικότητας και το μέγεθος πιο μεταβλητό.



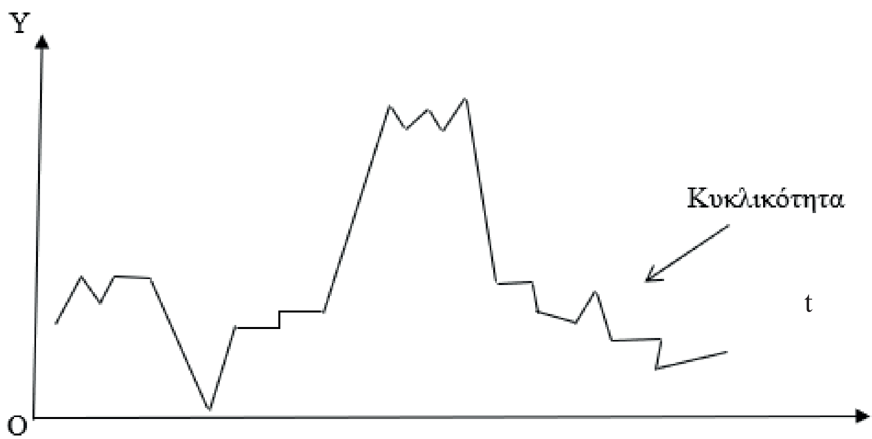
Γραμμική τάση **(α)** | Μη-γραμμική τάση **(β)** | Έλλειψη τάσης **(γ)**

Σχήμα 11.1: Περιπτώσεις γραμμικής και μη-γραμμικής τάσης και έλλειψης τάσης



Τάση και Εποχικότητα

Σχήμα 11.2: Γραφική παράσταση τριμηνιαίων δεδομένων χρονολογικής σειράς



Κυκλικότητα

Σχήμα 11.3: Γραφική παράσταση δεδομένων χρονολογικής σειράς με κυκλικότητα

Ας εξετάσουμε κάποιες αρχικές επιλογές πραγματοποίησης προβλέψεων.

- **Απλά υποδείγματα εξομάλυνσης**

  Αν δεν έχουμε τάση και εποχικότητα και για ένα βραχύ εύρος πρόβλεψης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα υποδείγματα *κινητού μέσου* και *απλής εκθετικής εξομάλυνσης*.

- **Υποδείγματα πρόβλεψης με τάση**

  Αν έχουμε τάση αλλά όχι εποχικότητα για μακρύ εύρος προβλέψεων μπορούμε να προχωρήσουμε με την *ανάλυση τάσης* και για βραχύ εύρος προβλέψεων με τη *διπλή εκθετική εξομάλυνση*.

- **Υποδείγματα πρόβλεψης με τάση και εποχικότητα**

  Τέλος, με τάση και εποχικότητα για μακρύ εύρος προβλέψεων μπορούμε να έχουμε *διάσπαση*, ενώ με εποχικότητα και χωρίς τάση και για βραχυχρόνια πρόβλεψη, μπορούμε να έχουμε τη χρήση της *μεθόδου Winters*.

11.1 Μέτρα ακρίβειας προβλέψεων

Πριν αναλύσουμε τις συγκεκριμένες μεθόδους προβλέψεων, ας αναφερθούμε αρχικά σε κάποια απαραίτητα μέτρα αξιολόγησης των προβλέψεων και της αξιοπιστίας τους. Εδώ, επικεντρωνόμαστε σε αυτά που χρησιμοποιούνται στα διάφορα Στατιστικά προγράμματα, όπως το MINITAB. Συγκεκριμένα έχουμε τα ακόλουθα μέτρα ακρίβειας των προβλέψεων:

- Το **Μέσο Απόλυτο Ποσοστιαίο Σφάλμα** (Mean Absolute Percentage Error, MAPE), που εκφράζει την ακρίβεια ως ποσοστό και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$MAPE = \frac{\sum \left| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right| \times 100}{n} \tag{11.1}$$

- Τη **Μέση Απόλυτη Απόκλιση** (Mean Absolute Deviation, MAD), που εκφράζει την ακρίβεια στις ίδιες μονάδες με τα δεδομένα και βρίσκεται από τον τύπο:

$$MAD = \frac{\sum \left| Y_t - \hat{Y}_t \right|}{n} \tag{11.2}$$