



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

(Με * έχουν σημειωθεί ενότητες που μπορούν να παραλειφθούν σε ένα προπτυχιακό επίπεδο σπουδών)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΜΙΑ ΜΙΚΡΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ xi

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ... 1

Ενότητα 1 Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

- 1(α) Βασικοί ορισμοί και συμβολισμός 1
1(β) Παρατηρήσεις - Σχόλια - Παραδείγματα..... 2

Ενότητα 2 ΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

- 2(α) Διανυσματικοί Χώροι (Linear Spaces)..... 5
2(β) Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων και Βάσεις Διανυσματικών Χώρων 7

Ενότητα 3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

- (Α) Εισαγωγικές διευκρινήσεις..... 11
(Β) Ορθογώνια Διανύσματα και Ορθογώνιοι Πίνακες 12
(BI) Καθετότητα εντός Διανυσματικών Χώρων Πεπερασμένης Διάστασης 12
(BII) Η κλάση των Ορθογωνίων και των Ορθομοναδιαίων Πινάκων..... 14
(Γ) Καθετότητα Υπόχωρων Διανυσματικού Χώρου με Εσωτερικό Γινόμενο 15
(ΓI) Γενικά περί καθετότητας εντός (διανυσματικού) χώρου εσωτερικού γινομένου 15
(ΓII) Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας..... 17

Ενότητα 4 ΝΟΡΜΕΣ (ΣΤΑΘΜΕΣ) ΠΙΝΑΚΩΝ

(I)	Εισαγωγή.....	20
(II)	Τα κίνητρο κατασκευής νόρμας πίνακα και ένα παράδειγμα	21
(III)	Μερικές συνήθειες νόρμες πινάκων.....	23

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΣ**GRAM-SCHMIDT..... 27**

	Εισαγωγή.....	27
(A)	Η ορθογώνια προβολή ως τελεστής και ως πίνακας	28
	(A1) Μία πρώτη γνωριμία στον χώρο των δύο και τριών διαστάσεων.....	28
	(A2) Η Προβολή ως Τελεστής σε χώρους πεπερασμένης διάστασης ...	31
	(A3) Η Προβολή ως Πίνακας από n -διάστατο σε μονοδιάστατο χώρο	32
	(A4) Η Προβολή ως Πίνακας από n -διάστατο σε υποχώρους n διάστατου χώρου	33
(B)	Ο αναδρομικός αλγόριθμος των Gram-Schmidt	34
	Εισαγωγή.....	34
	(B1) Η κλαστική Διαδικασία Κατασκευής Πεπερασμένης Ορθογώνιας Βάσης	35
	(B2) Ο τροποποιημένος αλγόριθμος των Gram-Schmidt και η ευστάθειά του.....	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III ΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ LU, QR και SVD 41

	Εισαγωγή.....	41
(A)	Οι Στόχοι της Ανάλυσης Τυχαίου Πίνακα	41
	(A1) Γενικές επισημάνσεις.....	41
	(A2) Μερικά χρήσιμα είδη παραγοντοποιήσεων	42
(B)	Συνοπτική παρουσίαση των αναλύσεων LU, QR και της Ανάλυσης σε Ιδιάζουσες Τιμές	43
	(B1) Η ανάλυση LU	43
	(B2) Η ανάλυση QR	45
	(B3) Η SVD (Ανάλυση σε Ιδιάζουσες Τιμές).....	47

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV ΤΡΙΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ	49
Εισαγωγικές Επισημάνσεις Κεφαλαίου IV	49
Ενότητα 1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΕΥΡΕΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ	
(A1) Εισαγωγή	50
(A2) Γενικές Επισημάνσεις για τους ΑΛΕΙ	51
(A3) Παραδείγματα ΑΛΕΙ	54
Ενότητα 2 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ	
(A) Εισαγωγικές έννοιες	56
(B) Η Φύση της Λειτουργίας των ΕΑ	57
(Γ) Ένα Θεωρητικού Παράδειγμα χρήσης ΕΑ	58
Ενότητα 3 Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ SVD	
(A) Εισαγωγικές επισημάνσεις	60
(B) Η Διαδικασία Κατασκευής μιας SVD	61
(B1) Η πλήρης κατασκευή της SVD	61
(B2) Η «οικονομική» κατασκευή της SVD	62
(Γ) Οι διάφορες εφαρμογές της SVD	65
(Δ)* Ιστορικά σχόλια και παρατηρήσεις για την SVD	66
Ενότητα 4* Η ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ CHOLESKY	
Εισαγωγή.....	67
(A) Η κατασκευή της ανάλυσης Cholesky	68
(B) Εφαρμογές	72
Ενότητα 5* Η ΑΠΛΗ ΚΑΙ Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ SCHUR	
Εισαγωγή.....	74
(A) Το Θεώρημα ύπαρξης και κατασκευής της απλής ανάλυσης Schur	74
(B) Παραδείγματα και περιοχές εφαρμογής	75
(Γ) Η Γενικευμένη Ανάλυση του Schur	77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 79

Εισαγωγή..... 79

Ενότητα 1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΩΝ GAUSS-JORDAN

- (I) Βασικές έννοιες για τετραγωνικά ($m=n$) και για ιδιόμορφα συστήματα ($m \neq n$) 80
- (II) Προετοιμασία επίλυσης ενός $m \times n$ συστήματος 81
- (III) Η μέθοδος επίλυσης του συστήματος Σ μέσω της μορφής $(\Sigma)'$ 85
- (IV) Το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης του Σ με χρήση της μεθόδου των Gauss-Jordan 86

Ενότητα 2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Εισαγωγή..... 86
- (1) Ανάλυση LU 87
- (2) Ανάλυση LDU* 87
- (3) Ανάλυση QR 88
- (4) Ανάλυση SVD 89
- (5) Συστήματα και παραγοντοποίηση. Γενικές παρατηρήσεις 89
- (6) Συγκριτικός Πίνακας Μεθόδων Επίλυσης των Γραμμικών Συστημάτων..... 90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI ΡΥΘΜΙΣΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑΣ..... 91

Εισαγωγή..... 91

- (A) Βασική θεωρία για την ρύθμιση και την ευστάθεια των αλγόριθμων της ΑΓΑ 92
- (B) Παραδείγματα χρήσης της θεωρίας του (A)..... 95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ	97
Εισαγωγή.....	97
Ενότητα 1* Η ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ARNOLD	
(A) Η επαναληπτική μέθοδος των δυνάμεων πίνακα	99
(B) Από τον αλγόριθμο του Krylov (1931) στον αλγόριθμο του Arnold (1951).....	101
Ενότητα 2* Η ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ LANCZOS	
Εισαγωγή.....	103
(A) Βασικές έννοιες για την προετοιμασία του αλγόριθμου του Lanczos ..	104
(B) Ο κλαστικός αλγόριθμος του Lanczos (1950)	106
Ενότητα 3 Η ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GAUSS -SEIDE	
(A) Εισαγωγή	107
(B) Η ιδέα της τριπλής διάσπασης του A.....	108
Ενότητα 4* Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙ(Σ)ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ	
(A) Εισαγωγικές επισημάνσεις	110
(B) Η BLM.....	110
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι ΠΕΡΙ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ	113
1. Η Ορίζουσα ενός Πίνακα και οι Ιδιότητές της	113
(I) Ορισμός Ελάσσονος Πίνακα.....	113
(II) Καταληκτικός Ορισμός της Ορίζουσας)	114
(III) Οι σημαντικές) πέντε ιδιότητες των οριζουσών.....	116
(IV) Η Ορίζουσα του Αντιστρόφου πίνακα	118
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΗΣ ΑΓΑ ΚΑΙ MATLAB	135
(A) Το νόημα του Παραρτήματος.....	135
(B) Τι είναι το LAPACK (Linear Algebra Package).....	135

(Γ) Matlab και LAPACK.....	135
(Δ) Θεματικές ενότητες για εργαστηριακές ασκήσεις με Matlab	136
1. Διάφορα θεμελιώδη προβλήματα της ΓΑ I.....	136
2.* Διάφορα μεσαίας δυσκολίας προβλήματα	137
3.** Πιο προχωρημένα προβλήματα.....	137

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ
(ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ) 139**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ I (Ενότητες 3 και 4).....	139
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ II.....	144
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ III.....	146
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ IV	153
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ V (Μέθοδοι Επίλυσης με Παραγοντοποίηση) ...	158
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ VI (Κατάσταση μιας μοντελοποίησης και Ευστάθεια αλγορίθμων).....	160
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ VII (Επαναληπτικές Μέθοδοι Υπολογισμού)	162

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	167
-------------------	-----

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ.....	169
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	171