ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΔiΣΙΓΜΑ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

τίτλος:
ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

συγγραφέας:
Καραγιαννάκης Δημήτριος

ISBN: 978-960-9495-47-9

www.disigma.gr / e-mail: info@disigma.gr

Find us on:

ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΤΟΥ ΑΞΕΧΑΣΤΟΥ

ΧΡΗΣΤΟΥ Α. ΚΟΚΚΟΡΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ XIII

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0 ΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΤΟΥΣ 1

0.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ (Α) ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ (Β) ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ 1

0.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.. 6

0.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ 10

(α1) Τα συνήθη σύμβολα $\subset$ («υποσύνολο») και $\supset$ («υπερσύνολο»)..... 11

(α2) Η διαμέριση (partition) ενός συνόλου....................................... 12

(β1) Οι βασικές πράξεις στην θεωρία των συνόλων.......................... 13

(β2) Η πράξη Καρτεσιανό γινόμενο n συνόλων ($n \geq 2$) 15

0.4 ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 16

(Α) Η Γενική Εξίσωση της Κωνικής Τομής: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 16

(Β) Χρήσιμοι Τριγωνομετρικοί Τύποι 16

(Γ) Δυωνυμικοί Συντελεστές.. 17

(Δ) Αριθμητικές Σειρές και ειδικά αριθμητικά αποτελέσματα 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ 19

1.1 Η ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ (DISCRETE CONVOLUTION)................ 19

1.1(α) Εισαγωγή 19

1.1(β) Διακριτά Σήματα (ή σήματα διακριτού χρόνου)........................ 20

1.1(γ) Γιατί ψηφιακό;Τα όρια της δειγματοληψίας και η επανασύσταση του σήματος 21

1.1(δ) Τα «δύο+ένα» βασικά συστατικά του ορισμού της διακριτής συνέλιξης 22

1.1(ε) Ο μαθηματικός ορισμός της διακριτής ∗ και δύο παραδείγματα 23

1.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ............................ 24

1.2(α) Εισαγωγή 24

1.2(β) Ο μαθηματικός τύπος της «πιο καλής ευθείας» (ε).................... 25

1.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ... 26

1.3(α) Η έννοια της Πολυωνυμικής Παρεμβολής (Polynomial Interpolation) 27

1.3(β) Η μέθοδος Nevton και η μέθοδος Lagrange για την ανεύρεση του P(x) 28

1.3(γ) Το Πολυώνυμο Παρεμβολής ως Πολυώνυμο Πρόβλεψης......... 29

1.3(δ) Εκτίμηση Σφάλματος του Πολυωνύμου Πρόβλεψης 30

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 33

2.1 Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ & Ο ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤ/ΣΜΟΣ LAPLACE 35

(Ι)Α Ο (μονόπλευρος) μετ/σμός Laplace: Ορισμός και Παραδείγματα 35

(Ι)Β Οι 4 βασικότερες Ιδιότητες του μετ/μού Laplace 39

(ΙΙ) Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace 41

2.2 Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER 42

2.2(α) Ορισμός και Θεώρημα του μετ/σμού Fourier 43

2.2(β) Οι 4 βασικότερες Ιδιότητες του μετ/μού Fourier 46

2.2(γ) Επί πλέον Ιδιότητες του μετ/μού Fourier 46

2.2(δ) Ο τύπος αντιστροφής του μετ/σμού Fourier 47

2.2(ε) Γενικές παρατηρήσεις και ένα ακόμη χρήσιμο παράδειγμα 48

2.3 Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΖΗΤΑ 49

2.3(α) Ορισμός του (αμφίπλευρου) μετ/σμού z & του μονόπλευρου μετ/σμού z 50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ 55

3.1. ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΦΙΛΤΡΩΝ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ 56

3.1(α) Ορισμός Μονοδιάστατου Ψηφιακού Σήματος και συναφείς επισημάνσεις 56

3.1(β) Γενικά περί φίλτρου, θορύβου και φιλτραρίσματος 57

3.1(γ) Η βασική λειτουργία του φίλτρου (ως LTIS) από μαθηματική σκοπιά 59

3.1(δ) Πώς ένα φίλτρο με impulse h επιδρά πάνω σε τυχαίο input x[n]; 60

3.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΤΟΥ SHANNON 61

3.2(α) Πόσο συχνά πρέπει να γίνεται μία δειγματοληψία σήματος ώστε να έχουμε όλες τις συχνότητές του; 61

3.2(β) Τί είναι η αναδίπλωση και γιατί θέλουμε να την αποφύγουμε 62

3.2(γ) Το Θεώρημα Δειγματοληψίας των Whittaker-Shannon 63

3.3 ΕΙΔΙΚΑ ΦΙΛΤΡΑ 64

3.3(α) Το LPF και τα μαθηματικά του 64

3.3(β) Τα φίλτρα FIR 66

3.3(γ) Τα φίλτρα IIR 69

3.4 ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ... 70

3.4(α) Η μορφή της σειράς Fourier σήματος f(t) και η σύγκλισή της εντός του TD ... 71

3.4(β) Η σύγκλισή της σειράς Fourier εντός του TD ... 74

3.4(γ) Αντιστοίχιση TD με FD(άρα και με το ΦΣ) ... 76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ 79

4.1 Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤ/ΣΜΟΥ LAPLACE ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ Γ.Δ.Ε ... 80

4.1(α) Συνοπτική παρουσίαση των Γ.Δ.Ε n–τάξεως με Σταθερούς Συντελεστές ... 80

4.1(β) Η επίλυση της αy΄+ βy΄+γy = g(x), α≠0, με χρήση του μετ/σμού L ... 80

4.1(γ) Η Γ.Δ.Ε του R=L-C κυκλώματος ... 84

4.1(δ) Παράδειγμα επίλυσης του R-L-C κυκλώματος με χρήση του L ... 85

4.2 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GAUSS ΚΑΙ Η «ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ» ΔΕΛΤΑ ΤΟΥ DIRAC ... 85

4.2(α) Η συνάρτηση Gauss ... 85

4.2(β) Η «συνάρτηση» δέλτα του Dirac ... 88

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 91

5.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ... 92

5.2 Η ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ... 94

5.2(α) Θεωρία Υπολογισμού: Αλγόριθμος και Υπολογιστικά Μαθηματικά ... 94

5.2(β) Η Αλγοριθμική Ανάλυση ... 96

5.2(γ) Γενικά χαρακτηριστικά της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων 97

5.2(δ) Τα μαθηματικά των ορίων της πολυπλοκότητας........................ 97

5.2(ε) Δύο βασικά Θεωρήματα για τα όρια της πολυπλοκότητας........ 99

5.2(στ) Παραδείγματα των big O, Ω και Θ 99

5.3 Η ΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ 2 ΚΑ ΣΤΙΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ................................... 101

5.3(α) Γενικά περί Στροφής στην Διακριτή και στην Συνεχή Γεωμετρία.. 101

5.3(β) Η στροφή σε επίπεδο του Ευκλείδειου χώρου 102

5.3(γ) Οι πίνακες χωρικής στροφής εντός του Ευκλείδειου χώρου 104

5.4 ΤΑ ΚΥΜΑΤΙΔΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ................................ 106

5.4(α) Το μαθηματικό υπόστρωμα προετοιμασίας για την θεωρία των wavelets.. 110

5.4(β) Τα βασικά μαθηματικά της θεωρίας των wavelets.................. 111

5.4(γ) Μερικές εικόνες-παραδείγματα με χρήση των wavelets.......... 114

ΑΣΚΗΣΕΙΣ/ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΜΕ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ 121

ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 157

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ.. 159

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

(*Τί φιλοδοξούμε και τι δεν φιλοδοξούμε σε σχέση με το παρόν πόνημα!*)

Από τον «μακρύ τίτλο» του βιβλίου μας μπορεί να παρασυρθεί κάποιος και να νομίσει ότι ,αν και σχετικά μικρό σε όγκο, το βιβλίο μας φιλοδοξεί να καλύψει όλες τις πτυχές των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. **Δεν υπάρχει όμως τέτοιο βιβλίο**! Η εξήγηση είναι απλή: στον 21ο αιώνα πια, μαθηματικοί, φυσικοί, μηχανικοί και «πληροφορικάριοι» (και ζητώ συγγνώμη για την λέξη αυτή που η χρήση της έχει ως μόνο σκοπό την πιο σύντομη περιγραφή), έχουν αντιληφθεί ότι, **εν δυνάμει, όλοι οι μαθηματικοί κλάδοι είναι εφαρμόσιμοι.**

Σε αυτό το βιβλίο (ή σύγγραμμα, ή μονογραφία, ή εγχειρίδιο ή βοήθημα, **ανάλογα με την χρήση που θα του κάνει** ο αναγνώστης, φοιτητής, διδάσκων ή ερευνητής), θελήσαμε να συνδυάσουμε τις πιο **βασικές μεθόδους των μαθηματικών** των δύο (όχι αγεφύρωτων!) κόσμων, του **Διακριτού** και του **Συνεχούς.** Κεντρικός μας στόχος ήταν βέβαια αυτές οι μέθοδοι να χρησιμοποιούνται σε τομείς της **πληροφορικής** αλλά όχι μόνο: έχουμε μία ικανή δόση μαθηματικής θεωρίας και για «καθαρόαιμους» **μαθηματικούς**, **φυσικούς** και **μηχανικούς** πέραν της πληροφορικής, αλλά χωρίς να παραβιάζεται το σοφό «μηδέν άγαν».

Μπορεί τώρα να φανεί κάπως ενοχλητικό, αλλά ας μας επιτρέψει ο αναγνώστης (ή αναγνώστρια), όπως κάνουμε σε όλες τις μονογραφίες μας, να του(της) προτείνουμε το **πώς πρέπει να διαβαστεί** για καλύτερα αποτελέσματα αυτό το βοήθημα:

(**α**) Παράλληλα ή και συμπληρωματικά με παρόμοια εγχειρίδια και με διασταύρωση άρθρων του διαδικτύου αλλά **μόνο σε αξιόπιστες σελίδες του**.

(**β**) Αφού **δεν υπάρχει** σύγγραμμα απαλλαγμένο τυπογραφικών –και όχι μόνο– λαθών, ή τουλάχιστον εμείς δεν έχουμε κανένα τέτοιο υπόψιν, αν υπάρξει σύγχυση σχετικά με κάποια έννοια ή αποτέλεσμα (π.χ. στις απαντήσεις των ασκήσεων) ας μην πανικοβληθεί ο αναγνώστης και ας ακολουθήσει την συμβουλή (α).

(**γ**) Σε μία πρώτη προσέγγιση ας μην ασχοληθείτε με τις ασκήσεις που έχουν αστερίσκο και κατά μείζονα λόγο διπλό αστερίσκο. Να ανησυχήσετε όμως λίγο, αν δεν μπορείτε να τα καταφέρετε με τις ασκήσεις που δεν έχουν απάντηση ή έχουν μόνο υπόδειξη!

(**δ**) Τέλος, αν και θιασώτης του «εργόχειρου», ο συγγραφέας συμβουλεύει για όσες ασκήσεις αναγράφεται η χρήση **matlab** ή **mathematica** να ακολουθήσετε την οδηγία. Είναι η πιο καλή μέθοδος ώσμωσης θεωρίας και πράξης

Και επειδή όπως συμβούλευε ο Πυθαγόρας **Μη εν πολλοίς ολίγα λέγε, αλλ' εν ολίγοις πολλά**, κλείνουμε την εισαγωγή μας με την ευχή καλό διάβασμα και καλή χρήση του βιβλίου αυτού.

Ηράκλειο, Σεπτέμβρης 2014

Ο συγγραφέας

Δρ. Δημήτρης Καραγιαννάκης

Καθηγητής ΤΕΙ Κρήτης,

υπεύθυνος προπτυχιακού και μεταπτυχιακού
μαθηματικού προγράμματος
του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής