

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1

1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Λύση ΔΕ, αντίστροφο πρόβλημα αυτής	3
	Ασκήσεις	10
1.3	ΔΕ πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών	12
	Ασκήσεις	15
1.4	Ομογενείς Διαφορικές εξισώσεις 1 ^{ης} τάξης	17
	Ασκήσεις	22
1.5	Γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης	24
	Ασκήσεις	28
1.5.1	Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli	29
	Ασκήσεις	32
1.5.2	Διαφορικές εξισώσεις Ricatti	33
	Ασκήσεις	35
1.5.3	Το πρόβλημα των ορθογωνίων τροχιών	35
	Ασκήσεις	42
1.6	Γραμμικές ΔΕ 2 ^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2 ^ο μέλος	42
	Ασκήσεις	47
1.6.1	Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης του Euler	48
	Ασκήσεις	50

1.6.2	Γραμμικές ΔΕ ν-στής τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2 ^ο μέλος (γενίκευση των αντίστοιχων ΔΕ 2 ^{ης} τάξης)	50
	Ασκήσεις	52
1.7	Γραμμικές ΔΕ 2 ^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό το 2 ^ο μέλος	53
1.7.1	A) Η συνάρτηση $F(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού	54
	Ασκήσεις	56
1.7.2	B) Η συνάρτηση $F(x)$ είναι της μορφής $F(x) = p(x)e^{\lambda x}$, όπου $p(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού	57
	Ασκήσεις	60
1.7.3	Γ) Η συνάρτηση $F(x)$ είναι της μορφής $F(x) = A\sigma\upsilon\nu(\mu x) + B\eta\mu(\mu x)$	60
	Ασκήσεις	63
1.7.4	Δ) Η συνάρτηση $F(x) = F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_n(x)$ είναι άθροισμα n συναρτήσεων, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ της μορφής A, B ή Γ ...	63
	Ασκήσεις	64
1.7.5	Γραμμικές ΔΕ ν-στής τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό το 2 ^ο μέλος (γενίκευση των αντίστοιχων ΔΕ 2 ^{ης} τάξης)	65
	Ασκήσεις	67
1.8	ΔΕ της μορφής $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	67
1.9	Τεχνολογικές εφαρμογές Διαφορικών Εξισώσεων	68
1.9.1	Ταχύτητα ψύξης υγρών	68
1.9.2	Ραδιενεργός διάσπαση	70
1.9.3	Κρεμασμένο σχοινί	72
1.9.4	Η ταλάντωση ελατηρίου	74
1.9.5	Ηλεκτρικά κυκλώματα	77
	Ασκήσεις	82
1.10	Συστήματα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές	83
1.10.1	Επίλυση γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο της απαλοιφής	84

1.10.2 Επίλυση συστήματος ΔΕ με τη μέθοδο της απαλοιφής χρησιμοποιώντας διαφορικούς τελεστές.....	89
Ασκήσεις.....	96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ

ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

99

2.1 Εισαγωγή, βασικές έννοιες.....	99
2.1.1 Συνέχεια της συνάρτησης $z = f(x, y)$	100
2.1.2 Βασικές τοπολογικές έννοιες	101
2.1.2.1 Φραγμένα σύνολα, φραγμένες συναρτήσεις.....	101
2.1.2.2 Περιοχή σημείου, ανοικτά και κλειστά σύνολα	102
2.2 Μερικές παράγωγοι.....	103
2.2.1 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = f(x, y)$ και ερμηνεία των μερικών παραγώγων.....	106
Ασκήσεις.....	107
2.3 Ολικό διαφορικό συνάρτησης	109
2.4 Διαφόριση σύνθετων συναρτήσεων	112
2.5 Ολοκλήρωση ολικών διαφορικών	115
2.5.1 Ολοκληρωτικοί παράγοντες.....	122
Ασκήσεις.....	129
2.6 Πεπλεγμένες συναρτήσεις.....	131
2.7 Παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων.....	132
2.7.1 Παράγωγοι μιας ανεξάρτητης μεταβλητής	132
2.7.2 Παράγωγοι περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών	133
2.7.3 Παράγωγοι που ορίζονται με σύστημα εξισώσεων.....	135
2.7.4 Ορισμός συναρτησιακής εξάρτησης	137
2.8 Αλλαγές μεταβλητών στις παραγώγους	139
2.8.1 Αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής.....	139
2.8.2 Αλλαγή εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής	141

2.8.3	Αλλαγή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών.....	141
2.8.4	Εφαρμογές - Παραδείγματα	142
	Ασκήσεις	151
2.9	Εξισώσεις επιπέδων και επιφανειών 2 ^{ου} βαθμού.....	153
2.9.1	Εξίσωση επιπέδου	153
2.9.2	Εξίσωση ευθείας στο χώρο	154
2.9.3	Εξίσωση σφαίρας.....	155
2.9.4	Εξίσωση ελλειψοειδούς	155
2.9.5	Εξίσωση υπερβολοειδούς.....	156
2.9.6	Εξίσωση κώνου	156
2.9.7	Εξισώσεις παραβολοειδών.....	157
2.9.8	Εξισώσεις κυλινδρικών επιφανειών.....	158

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

161

3.1	Ακρότατα συνάρτησης δύο μεταβλητών.....	162
	Ασκήσεις	167
3.2	Ακρότατα συνάρτησης πολλών μεταβλητών	167
	Ασκήσεις	172
3.3	Ακρότατα πεπλεγμένης συνάρτησης.....	172
3.3.1	(1 ^η Περίπτωση): Πεπλεγμένη με μια μεταβλητή.....	172
3.3.2	(2 ^η Περίπτωση): Πεπλεγμένη με δύο μεταβλητές.....	174
	Ασκήσεις	176
3.4	Ακρότατα συνάρτησης με συνθήκες	176
3.4.1	(1 ^η Περίπτωση) ($v = 3$ μεταβλητές, $p = 2$ συνθήκες).....	178
3.4.2	(2 ^η Περίπτωση) ($v = 3$ μεταβλητές, $p = 1$ συνθήκη).....	181
	Ασκήσεις	187

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΠΛΑ, ΤΡΙΠΛΑ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 189

Α. ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1	Ορισμοί.....	189
4.2	Ιδιότητες διπλού ολοκληρώματος	190
4.3	Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος.....	192
4.4	Παραδείγματα – Εφαρμογές.....	194
	Ασκήσεις.....	203
4.5	Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος σε πολικές συντεταγμένες.....	205
4.6	Αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα	210
	Ασκήσεις.....	219
4.7	Εφαρμογές των διπλών ολοκληρωμάτων στη Μηχανική.....	220
	Ασκήσεις.....	225

Β. ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.8	Ορισμός, ιδιότητες και υπολογισμός αυτών.....	227
	4.8.1 Ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος.....	228
	4.8.2 Υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος	229
4.9	Παραδείγματα – Εφαρμογές.....	230
	Ασκήσεις.....	236
4.10	Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα	237
	Ασκήσεις.....	241
4.11	Εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος στη Μηχανική.....	241
	Ασκήσεις.....	249

Γ. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.12	Ορισμοί.....	250
4.13	Επίλυση γενικευμένων ολοκληρωμάτων.....	251
	Ασκήσεις.....	264

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ,
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ** 265

A. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

5.1	Γενικά – Ορισμοί.....	265
5.2	Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης	266
	Ασκήσεις	274
5.3	Συνθήκες σταθερού μέτρου ή διεύθυνσης της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r}(t)$	274
5.4	Ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων	278
	Ασκήσεις	279
5.5	Παραγωγή αριθμητικής συνάρτησης κατά μια διεύθυνση.....	280
	Ασκήσεις	287
5.6	Εφαπτομένη καμπύλης.....	287
	Άσκηση	292
5.7	Διαφορικοί τελεστές.....	293
5.7.1	Βαθμωτά Πεδία.....	293
5.7.2	Κλίση (grad) σημειακής συνάρτησης	294
5.7.3	Απόκλιση (div) διανυσματικής συνάρτησης.....	295
5.7.4	Στροφή (rot) διανυσματικής συνάρτησης	297
5.7.5	Άλλοι διαφορικοί τελεστές.....	298
	Ασκήσεις	309

B. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

I. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.....	312	
5.8	Συνοδεύον τρίεδρο. Τύποι των Serret-Frenet.....	312
5.9	Υπολογισμός της καμπυλότητας k και της στρέψης σ	321
	Ασκήσεις	338
II. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ	340	
5.10	Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	340

5.11 Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας. Θεμελιώδη ποσά 1 ^{ης} τάξης.....	343
Ασκήσεις	357

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 361

A. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1 Ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος	361
6.2 Υπολογισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος.....	363
6.3 Ιδιότητες επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων	367
6.4 Άλλες ιδιότητες επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων	375
6.4.1 Υπολογισμός έργου με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα	375
6.4.2 Υπολογισμός εμβαδού με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα	377
Ασκήσεις	381
6.5 Θεώρημα του Green στο επίπεδο	383
6.5.1 Ιδιότητες του τύπου του Green στο επίπεδο	384
6.6 Εφαρμογές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στη Μηχανική	392
Ασκήσεις	397

B. ΕΠΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.7 Εμβαδό επιφάνειας	401
6.8 Ορισμός επιεπιφανείου ολοκληρώματος.....	410
6.8.1 Ιδιότητες επιεπιφανείου ολοκληρώματος	413
6.9 Θεώρημα Gauß – Ostrogradsky (ή Green στο χώρο) και Θεώρημα Stokes	422
6.9.1 Θεώρημα Gauß – Ostrogradsky, ή Θεώρημα Green στο χώρο, ή Θεώρημα Απόκλισης.....	422
6.9.1.1 Ιδιότητες του Θεωρήματος Απόκλισης.....	424
6.9.2 Θεώρημα του Stokes	425
6.9.2.1 Ιδιότητες Θεωρήματος Stokes	427

6.10 Εφαρμογές επιεπιφάνειου ολοκληρώματος στη Γεωμετρία, Φυσική και Μηχανική	443
Ασκήσεις	456

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER 461

7.1 Εισαγωγή	461
7.2 Σειρές Fourier	462
7.3 Συνθήκες σύγκλισης του Dirichlet	468
7.4 Σειρές ημιτόνων και σειρές συνημιτόνων	470
7.5 Παραδείγματα και εφαρμογές ανάλυσης συναρτήσεων κατά Fourier.....	473
7.6 Άρτιες και περιττές επεκτάσεις συναρτήσεων	493
7.7 Ολοκλήρωση σειράς Fourier	501
7.8 Μιγαδική παράσταση της σειράς Fourier	510
Ασκήσεις	512

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 519

Α. ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

8.1 Ορισμοί.....	519
8.2 Ιδιότητες αόριστου ολοκληρώματος	521
8.3 Κανόνες ολοκλήρωσης.....	523
8.3.1 Ολοκλήρωση κατά μέρη	523
8.3.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση.....	524
8.3.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.....	525
Ασκήσεις	527
8.4 Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης	529
Ασκήσεις	537

8.5	Ολοκληρώματα που ανάγονται με αντικατάσταση σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης.....	538
8.5.1	1 ^η Μορφή: $\int R(e^x) dx$ όπου $R(e^x)$ ρητή συνάρτηση του e^x ... Ασκήσεις.....	538 539
8.5.2	2 ^η Μορφή: $\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$ όπου $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ είναι ρητή συνάρτηση των $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$ Ασκήσεις.....	539 543
8.5.3	3 ^η Μορφή: $\int R\left(x, \sqrt[n]{\alpha x + \beta}\right) dx$ ή $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$ Ασκήσεις.....	544 546
8.5.4	4 ^η Μορφή: $\int R(x, \sqrt[\nu_1]{\omega}, \sqrt[\nu_2]{\omega}, \dots, \sqrt[\nu_n]{\omega}) dx$, όπου $\omega = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ Ασκήσεις.....	546 547
8.5.5	5 ^η Μορφή: i) $\int R(x, \sqrt{x^2 - \mu^2}) dx$, ii) $\int R(x, \sqrt{x^2 + \mu^2}) dx$... Ασκήσεις.....	547 550
8.5.6	6 ^η Μορφή: $\int R(x, \sqrt{\mu^2 - x^2}) dx$ Ασκήσεις.....	551 552
8.5.7	7 ^η Μορφή: $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}) dx$ Ασκήσεις.....	553 556
8.5.8	8 ^η Μορφή: $\int R(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta}) dx$ Ασκήσεις.....	557 558
8.6	Αναγωγικοί τύποι..... Ασκήσεις.....	559 566

B. ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

8.7	Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος.....	567
8.8	Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος.....	568
8.8.1	Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος..... Ασκήσεις.....	569 576

8.9	Εφαρμογές ορισμένου ολοκληρώματος	577
8.9.1	Εμβαδό χωρίου σε πολικές συντεταγμένες	577
	Ασκήσεις	579
8.9.2	Μήκος τόξου καμπύλης.....	580
	Ασκήσεις	585
8.9.3	Όγκος στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα Ox	587
8.9.4	Όγκος στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα Oy	589
	Ασκήσεις	591
8.9.5	Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής	592
	Ασκήσεις	596

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 599

A.	ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ	599
B.	ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ.....	607
Γ.	ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΣΕΙΡΕΣ	610
Δ.	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.....	616

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 619

A.	Ξένη.....	619
B.	Ελληνική.....	620